

CALK-1000电路分析实验套件 实验教程（第2章 谐振电路）

Rev2.0

华清科仪（北京）科技有限公司

 **Huatsing Instruments**

目 录

第 0 章 实验器材熟悉与掌握	- 1 -
0.1 CALK-1000 电路分析实验套件介绍	- 1 -
0.2 HPI-1000(plus)口袋仪器安装与使用注意	- 2 -
0.3 Lab0 熟悉 CALK-1000 模电套件的使用	- 5 -
第 2 章 谐振电路	- 8 -
2.1 基础知识	- 9 -
2.1.1 电路的相量表示	- 9 -
2.1.2 电阻 R (Resistor)	- 13 -
2.1.3 电容 C (Capacitor)	- 15 -
2.1.4 电感 H (Inductor)	- 20 -
2.1.5 阻抗与导纳 (Impedance & Admittance)	- 23 -
2.1.6 总结	- 27 -
2.2 RLC 串联谐振电路	- 28 -
2.2.1 Lab2.2-1 串联谐振电路基本特性	- 28 -
2.2.2 谐振曲线与品质因数	- 30 -
2.2.3 Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制	- 32 -
2.2.4 *Lab2.2-3 电感、电容值及内阻测量	- 37 -
2.2.5 *Lab2.2-4 串联谐振电路电感、电容上的电压曲线测量绘制	- 40 -
2.2.6 串联谐振电路的通频带	- 47 -
2.2.6 *Lab2.2-5 串联谐振电路各元件电压频率响应	- 49 -
2.3 RLC 并联谐振电路	- 51 -
2.3.1 RLC 并联谐振电路基本特性	- 51 -
2.3.2 Lab2.3-1 并联谐振曲线测量与绘制	- 53 -
2.3.3 并联谐振电路通频带	- 59 -
2.3.4 *元件串联模型与并联模型	- 60 -
2.3.5 *LC 并联谐振电路	- 64 -
2.3.6 *Lab2.3-4 并联谐振电路各元件电流频率响应	- 68 -

2.4 本章总结.....	- 71 -
2.4.1 *Lab2.4-1 谐振频率偏移问题研究	- 71 -
2.4.2 *Lab2.4-2 口袋仪器测量准确度分析.....	- 75 -
2.4.3 本章总结.....	- 77 -
附录 A 参考资料.....	- 80 -
附录 B UT120C 万用表主要技术指标.....	- 81 -

huatsing.com

第 0 章 实验器材熟悉与掌握

0.1 CALK-1000 电路分析实验套件介绍

感谢使用华清科仪推出的 CALK-1000 电路分析实验套件，该套件可与 HPI-1000(plus) 口袋仪器无缝连接配合使用，能够完成众多电路原理与电路分析实验项目。



CALK-1000 电路分析实验套件

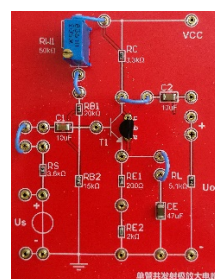
套件内各种器件与工具介绍

1. 配套工具

CALK-1000 套件中配备的实验工具：



配套工具



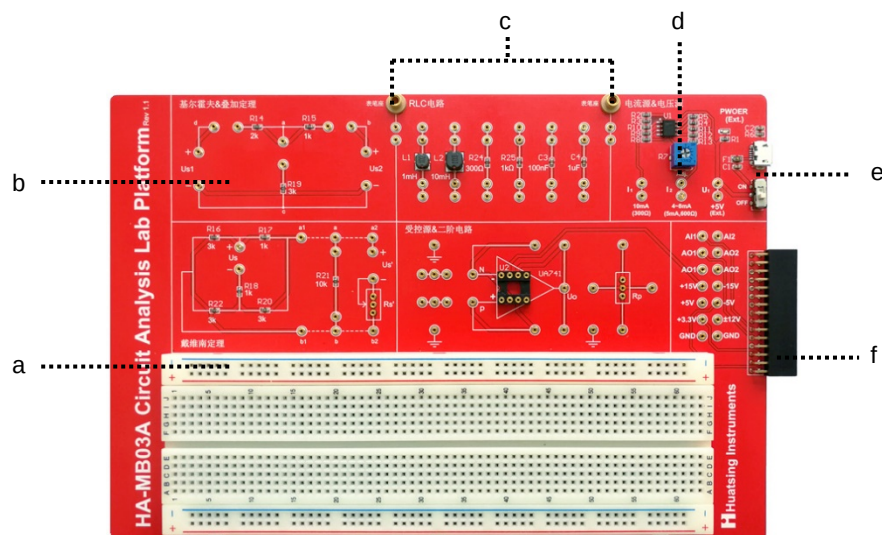
用成形短接线连接电路

- 万用表：UT120C 型 3 3/4 位数字万用表，可以测量交/直流电压、交/直流电流、电阻、电容、频率……，使用前请仔细阅读[万用表技术参数（附录 B）](#)及使用说明；
- 螺丝刀：一字/十字可换，顶端带磁铁，从面包板上拔除芯片时请使用一字端；
- 剥线钳：用于切断短接线，并剥除线皮；
- 平头头镊子：用于成形 3cm 以下的短接线，用这种成形短接线搭建的电路整洁清晰，容易查找故障点。



2. HA-MB03A 电路分析实验板

塑料盒下层为实验用的 HA-MB03A 电路分析实验板。



HA-MB03A 实验板

HA-MB03A 实验板部件描述

序号	名称	描述
a	用户实验区	可以使用成形好的短接线连接到半定制实验区的散孔座，自行搭建电路，扩展实验内容；
b	半定制实验区	可以完成基尔霍夫定律、叠加定理、戴维南定理、受控源电路、二阶电路、RLC 谐振电路等实验内容；
c	万用表表笔座	配置了 2 个带弹簧锁片的万用表表笔座，可以将套件中 UT120C 万用表表笔锁定在插座中；这样在数值测量，尤其需要将万用表串接入电路中的电流值测量时，能够解放双手、保证测量准确；
d	电源	I1（左）：固定电流源（10mA） I2（中）：可调电流源（0~4mA） U1（右）：外部电压源（+5V），由右边 USB 口供电
e	USB 电源	为电流源供电，请用 micro-USB 线连接+5V DC 电源（不可连接其他电源）
f	HPI 专用接口	用于连接 HPI-1000(plus)口袋仪器， <u>注意方向，插拔时切勿把 HPI-1000(plus)口袋仪器接口内的插针碰弯折断</u>

0.2 HPI-1000(plus)口袋仪器安装与使用注意

HPI-1000 或 HPI-1000plus 型口袋仪器如果已经正确安装并且已掌握使用技巧可以跳过此节，直接阅读后续具体实验章节，否则务必认真阅读这一部分。

HPI-1000(plus)口袋仪器软件安装

1. 上位机程序下载

首先，从华清科仪网站 http://www.huatsing.com/download/d_pis/ 下载上位机程序，请根据硬件版本下载的 HPI-1000 或 HPI-1000plus 的上位机程序。

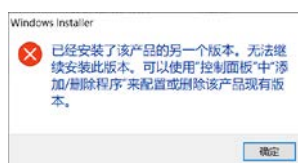


上位机程序下载

2. 上位机程序安装

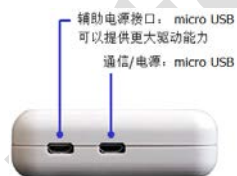
安装上位机程序不必连接硬件，直接运行 Pocketlab_Setup.msi 安装程序即可，默认安装路径是在 C 盘根目录下建立一个 PocketLab 文件夹，如果不合适可以自行更改安装路径。

如果安装过程出现如下提示，说明电脑上装有之前版本的上位机程序，可以先删除旧版本程序，再进行安装。



3. 硬件连接

请用 HPI-1000(plus)口袋仪器套件中的 micro-USB 线（黑色）连接口袋仪器后端中间的 USB 口与电脑（边上的辅助供电口仅能供电，无通信功能）。正确连接后，口袋仪器顶面的指示灯应呈现绿色常亮状态，如果呈现不亮或出现黄色、红色或闪烁状态，请立即断开 USB 连线并检查设备与连接是否正确。



HPI-1000(plus)口袋仪器后端接口



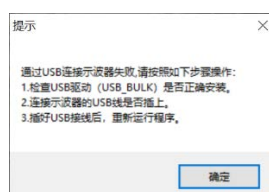
顶面指示灯

4. 硬件驱动安装

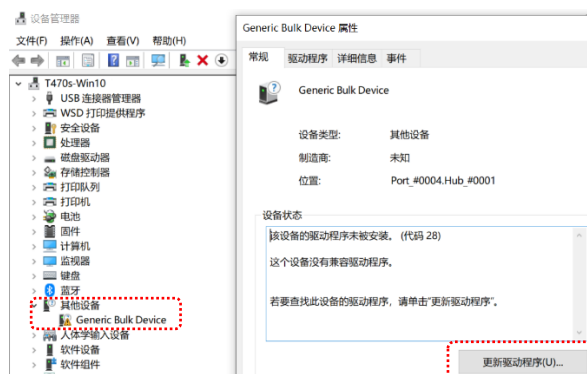
硬件连接后电脑右下角会显示 Generic Bulk Device 设备已安装就绪的提示。



但这不意味的硬件驱动已经正确安装，这时点击桌面上的“口袋实验室”运行图标会看到如下提示，这说明硬件驱动还未正确安装。



打开电脑设备管理器，可以看到电脑并没有正确识别 HPI-1000(plus)口袋仪器，因此在 Generic Bulk Device 设备图标上有一个黄色惊叹号。请双击设备图标，选择更新驱动程序。



接下来指定一下驱动程序的位置（选择手动查找而非自动搜索）。



硬件驱动位于上位机程序文件夹的 windows driver 子目录中，如果选择默认安装路径，那就是 C:\PocketLab\windows driver，注意把“包括子文件夹”选项勾选上。



然后电脑将安装驱动，驱动安装好后将显示正确的设备名称 TivaWare Bulk Devices，并且图标上的黄色惊叹号也将消失。至此驱动安装完成。



HPI-1000(plus)口袋仪器使用注意

口袋仪器包含众多模块，结构复杂，又仅依靠 USB 口供电，驱动能力有限，因此使用时务必注意以下电气特性，因为使用不当造成的设备损坏不在保修范围之内。

1. 绝对禁止事项

- 信号源（AO1 与 AO2）绝对禁止对地短路，哪怕瞬间也有可能造成设备损坏；
- 信号源（AO1 与 AO2）负载阻抗不得低于 1K Ω ；
- 各路固定电源与程控电源禁止对地短路；

2. 口袋仪器各个模块承载参数（超出以下参数有可能造成设备损坏）

模块	特性	参数
示波器	输入信号范围	-15 ~ +15V
信号源 1（大信号）	输出电流	10mA
信号源 2（小信号）	输出电流	5mA
逻辑分析仪	输入信号范围	0 ~ 5V
固定电源 *1 (不使用辅助电源)	+5V 驱动能力	50mA / 200mA (plus)
	-5V 驱动能力	20mA / 200mA (plus)
	+3.3V 驱动能力	100mA / 200mA (plus)
	+15V 驱动能力	20mA / 100mA (plus)
	-15V 驱动能力	20mA / 100mA (plus)
程控电源	-12 ~ +12V 驱动能力	20mA

*1: /前为 HPI-1000 驱动能力，后为 HPI-1000plus 驱动能力；

0.3 Lab0 熟悉 CALK-1000 模电套件的使用

实验目的

熟悉 CALK-1000 模拟电路实验套件的电气连接，避免人为损坏。

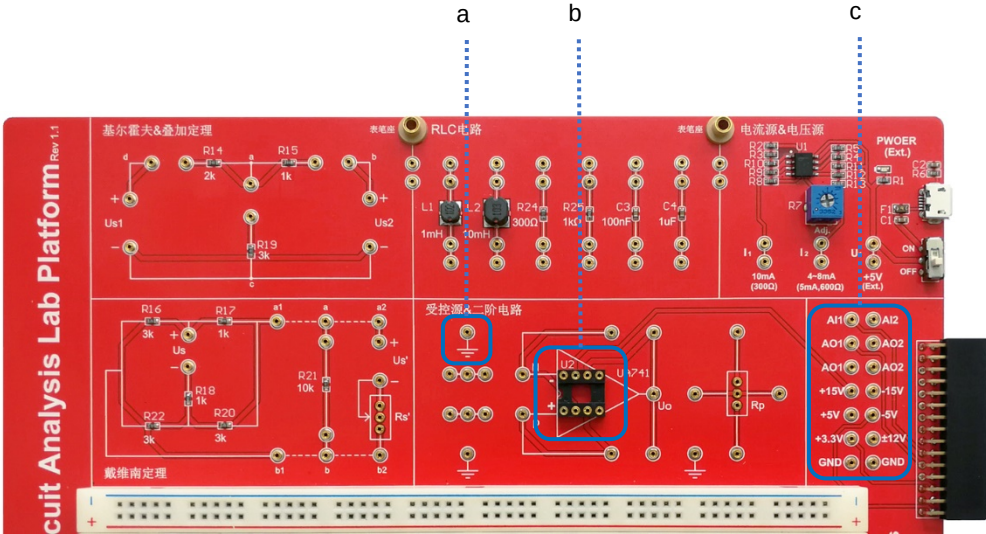
实验器材

1. CALK-1000 模拟电路实验套件
2. HPI-1000(plus)口袋仪器
3. 短接线、剥线钳、镊子等

HA-MB03A 面包板的使用

CALK-1000 套件中最主要的模块就是 HA-MB03A 电路分析实验板，虽然之前已经简要介绍过实验板上各个部件名称与作用，但是熟悉其中一些模块特性与电气连接细节可以提高后续实验的成功率，更重要的是避免人为误操作造成的设备损坏。

- 熟悉 HA-MB03A 实验板的电气连接



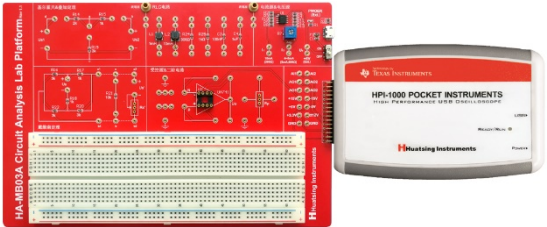
HA-MB03A 实验板电气连接

序号	描述
a	实验板上凡是有 接地标志 的散孔座都已经连接到了 c 区的 GND 端；
b	U2 芯片座只可以插入 UA741 运放芯片（ 注意方向 ），芯片的 7 脚（Vcc+）、4 脚（Vcc-）已经连接到 c 区的+15V、-15V 电源；
c	HPI-1000(plus)口袋仪器信号及电源区，其中 GND 连接的是口袋仪器模拟地 AGND；这里的+5V 电源来自口袋仪器，上面的+5V（Ext.）电源来自 USB 接口；

● 熟悉 HA-MB03A 实验板与 HPI-1000(plus)口袋仪器的连接

将 HA-MB03A 实验板的 HPI 专用接口小心的插入与 HPI-1000(plus)口袋仪器的前部接口，然后将 HPI-1000(plus)口袋仪器与电脑 USB 接口通过 micro-USB 线连接（不必打开上位机软件）。正确连接后，口袋仪器顶面的指示灯应呈现绿色常亮状态，如果呈现不亮或出现黄色、红色或闪烁状态，请立即断开 USB 连线并检查设备与连接是否正确。

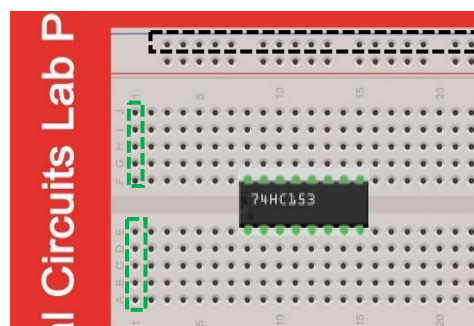
连接好后，用 CALK-1000 套件中的万用表测量 U2 芯片座的 7 脚（上排第 2 脚）电压是否是+15V，4 脚（下排第 4 脚）电压是否是-15V；实验板上有接地标志的散孔座是否与 c 区的 GND 端连通。



HA-MB03A 实验板与 HPI-1000(plus)口袋仪器连接

● 熟悉 HA-MB03A 实验板的用户实验区

简单的电路可以在半定制实验区搭接，复杂一些的扩展电路、自定义电路就要借助用户扩展实验区（面包板区域）了。面包板区域由 2 个中心块和 3 个边条组成，其中红色、蓝色线条内的边条区域每一行的孔是连通的，（图片中黑色虚线框内的孔都是连通的）；中心块的每一列的 5 个孔是连通的（图片中绿色虚线框内的 5 个孔都是连通的）；芯片应该像图片中那样插接在中心块沟槽的两侧。



需要注意的是：1.芯片在插拔过程中要特别小心不要把管脚弄弯折断，在拔除芯片时可以借助实验套件中配备的一字螺丝刀；2.在面包板和端子上连接导线时也要小心不要把线头折断在孔洞内，尤其禁止把面包板或端子上连接的多根导线一下子用力同时拔掉，这样极易造成线头折断在孔内或是孔内簧片损坏。

第2章 谐振电路

谐振电路是电路分析中非常重要的一个章节，后续模拟电路中用到的波形发生电路、选频电路都以谐振电路为基础，所以透彻的理解掌握谐振电路是学好后续课程的基础。这一章公式比较多，有些公式的形式还比较复杂，对这些公式不能死记硬背、生搬硬套，应该在理解的基础上自己进行推导后真正做到知其然且知其所以然。

谐振电路这一章还有一个特点就是实验比较难做，这也是为什么很多教程这一章只安排串联谐振曲线测量一个动手实验的原因。但是这一章很多曲线如果只是看教材上现成的图片（其中部分还是错误的或是不准确的），对有些理论就不能深入理解，也不能对实际电路牢固掌握。为此本教程基于 **HPI-1000(plus)多功能口袋仪器**、**CALK-1000 电路分析实验套件** 等小巧简便的实验装置设计了大量的相关实验。对于这些实验项目，读者可以根据自己需要进行取舍。作者认为**超出一般教材要求的理论分析与实验前面加以*标注**。

多数电路原理教材会把基本元件（电阻、电容、电感）、电路向量表示等知识点放在不同章节中讲授。本教程将上述知识点都放在谐振电路这一章中，如果读者对这些知识点已经充分掌握，可以跳过此部分，直接阅读谐振电路部分。

本章的参考教材有两本，一本是高继森等人编著的《电路分析基础》（下图左，[参考资料\[1\]](#)），该书的特点在于内容详实，物理概念清晰，美中不足的是书籍里不少公式在排版印刷过程中出现了错误，阅读时一定要加以注意。另外一本是于歆杰等人编著的《电路原理》（下图右，[参考资料\[2\]](#)），该书胜在内容深入全面，适合基础比较好的读者阅读。



图 2.0.1 参考教材

本书作为一本实验教程，偏重于实验讲授，对于理论概念的讲解肯定不如上面两本教材深入细致，因此如果对于谐振电路完全没有概念的读者请先阅读上述两本教材，尤其是《电路分析基础》那本，再根据本教程动手做实验。

2.4.3 本章总结一节对本章的知识点、公式、实验安排有着提纲挈领式的归纳总结，有需要的时候可以翻过去查阅，可以保持学习思路清晰。

本章部分插图比较小，如果看不清，请大家扫描右边二维码进入**华清科仪公众号**的教学中心下面**CALK-1000 实验专题**观看。公众号中的文章内容编排与本书结构大致相同，但是错误疏漏较多，如遇与本书不同之处，以本书为准。

本章部分实验配有 Multisim 仿真程序，请从**华清科仪网站**下载：www.huatsing.com/download/d_pis/124.html，程序基于 Multisim 14.0 编写。



CALK-1000 实验专题

2.1 基础知识

2.1.1 电路的相量表示

正弦（余弦）信号是电路中经常要用到的交流信号，这是因为一来现实世界中的交流电就是正弦信号，二来方波、三角波等其他形式的周期信号都可以通过傅里叶级数展开为一组正弦信号的叠加。对于正弦形式的电流信号可以表示为： $i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi)$ ，其中：

- I_m 是 $i(t)$ 信号的最大值（幅值）；
- ω 是角频率，单位是弧度/秒（rad/s），角频率 ω 与真实频率 f （单位是 Hz， $1\text{Hz}=1/\text{s}$ ）的关系是 $\omega=2\pi f$ ，角频率 ω 与周期 T （单位是 s， $1\text{s}=1/\text{Hz}$ ）的关系是 $\omega=2\pi/T$ ；
- φ 称为初相角，单位是弧度（rad），表示 0 时刻信号的初始角度；

对于正弦形式的电压信号可以表示为： $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$ 。由此可见，通过 I_m （ U_m ）、 ω 、 φ 三个参数就能准确地描述一个正弦电流（电压）信号波形（图 2.1.1）。



图 2.1.1 正弦电压信号

从图 2.1.1 可以看出，当 $\varphi>0$ 时，波形左移；当 $\varphi<0$ 时，波形右移。 U_m 是信号的幅度上的最大值，也称峰值（peak value），它是峰-峰值（peak-peak value）的一半，即： $U_m=U_{pk}=U_{p-p}/2$ 。我们还经常用到的一个值就是交流信号的有效值（effective value），也称均方根值或方均根值，通常用不带角标大写字母表示。对于正弦信号而言，有效值与峰值的关系如下： $U=U_m/\sqrt{2}\approx 0.707U_m$ （定义及推导过程略）。

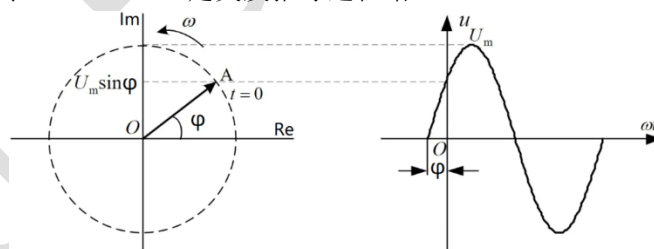


图 2.1.2 正弦信号的相量表示

对于时域的正弦交流信号，还可以在复平面以相量形式进行表示，图 2.1.2 就是将 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi)$ 信号在复平面上用相量表示。

与标量相对应的是向量——表示既有大小又有方向的物理量；在描述正弦信号时，常用相位的“相”字，也可以说“相量”特指正弦信号的向量表示形式。本教程今后统一使用“相量”二字，它与向量表示的物理含义完全一样。

为了区分标量与相量，后续文章中相量用**粗斜体字**表示，如： U_m 表示信号 $u(t)$ 的幅值，是一个实数值； $\dot{U}$ 是 $u(t)$ 信号的相量表示，也有很多书籍在大写字母上面加一个圆点表示相量，即： $\dot{U}$ 。

根据欧拉公式： $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ ，令 $\theta=\omega t+\varphi$ ，于是有：

$$e^{j\theta}=\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi) \quad (\text{公式 2.1.1})$$

从公式 2.1.1 可以看出：

- 余弦函数可以用相量的**实部**表示，在复平面上用相量在**实轴**上投影表示大小，与实轴的夹角表示相位；
- 正弦函数可以用相量的**虚部**表示，在复平面上用相量在**虚轴**上投影表示大小，与实轴的夹角表示相位；

比如：一个正弦实函数： $y_1(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ ，根据欧拉公式可以写成如下形式：

$$y_1(t)=\text{Im}[Ae^{j(\omega t+\varphi)}]=\text{Im}[Ae^{j\omega t}e^{j\varphi}]=\text{Im}[Ae^{j\omega t}] \quad (\text{公式 2.1.2})$$

$$\text{其中：相量 } \mathbf{A}=Ae^{j\varphi} \quad (\text{公式 2.1.3})$$

公式 2.1.2 中的 Im 并不是电流最大值的意思，而是取后面方括号里的复数虚部的意思；公式中相量 $\mathbf{A}$ 是一个模为 A ，相角为 φ 的相量，在复平面上的形式如图 2.1.3 所示。

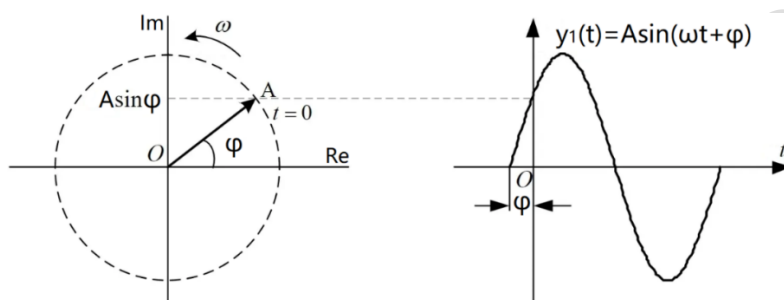


图 2.1.3 $y_1(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ 的相量表示

对比图 2.1.3 左边的相量 $\mathbf{A}$ 与右边的实函数 $y_1(t)$ ，可以发现相量 $\mathbf{A}$ 包含函数 $y_1(t)$ 的幅值信息 A 与相角信息 φ ，但不包含频率信息 ω 。函数 $y_1(t)$ 任意时刻的值等于该时刻相量 $\mathbf{A}$ 在虚轴上的投影，如： $y_1(t)|_{t=0}=A\sin\varphi$ 。这一转换过程用动画（GIF）表示则更为清晰，可以在扫描右侧二维码在公众号文章里观看动画。



相量 $\mathbf{A}$ 的表示方法有以下 3 种，这三种表示是等价的：

- $\mathbf{A}=A\cos\varphi+jA\sin\varphi$
- $\mathbf{A}=Ae^{j\varphi}$
- $\mathbf{A}=A\angle\varphi$

公式 2.1.2 中还有一项 $e^{j\omega t}$ ，这一项称为旋转因子，任意相量与之相乘，相量的模不变，只是相角逆时针旋转 ωt 弧度。

图 2.1.3 相量 $\mathbf{A}$ 在虚轴上的投影及相角表示实函数 $y_1(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$ ，那么在实轴上的投影及相角表示什么呢？请看图 2.1.4。

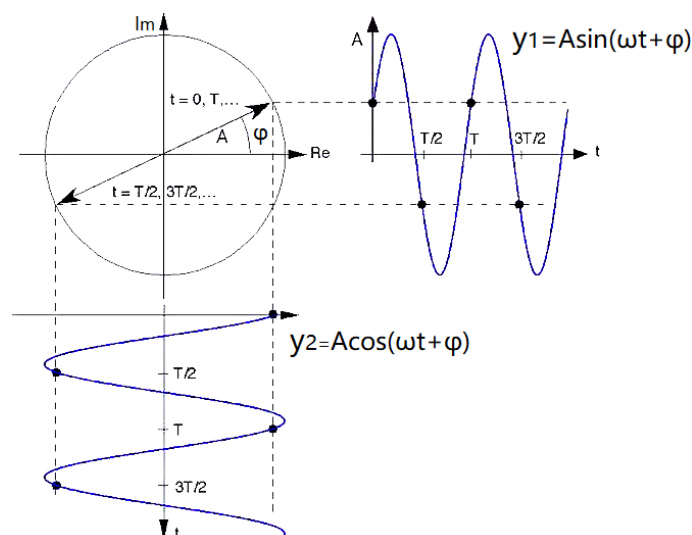


图 2.1.4 两个正交函数的复平面表示

从图 2.1.4 可以看出，相量 A 在实轴上的投影及相角表示另一个实函数：

$y_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ ，根据公式 2.1.2 及 2.1.3，可以得到：

$$y_2(t) = \operatorname{Re}[Ae^{j(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[Ae^{j\omega t}e^{j\varphi}] = \operatorname{Re}[Ae^{j\omega t}], \quad \text{其中：相量 } A = Ae^{j\varphi} \quad (\text{公式 2.1.4})$$

$y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 这两个函数幅值与频率相同、相角相差 90° ，我们称 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 这两个函数是正交的，二者具有 $y_1(t)^2 + y_2(t)^2 = A^2$ 的关系。根据三角公式，正余弦形式可以相互转换，即： $y_1(t) = A \sin(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ)$ ，那这个余弦形式用相量在复平面上如何表示呢？请看图 2.1.5。

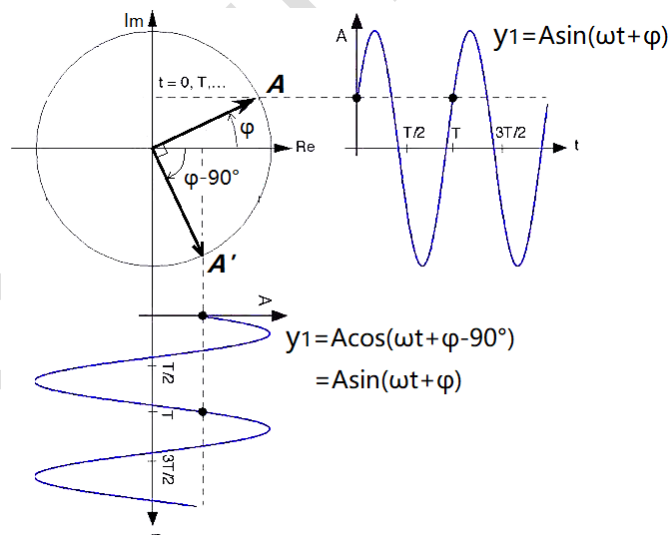


图 2.1.5 同一个函数正余弦形式的复平面表示

从图 2.1.5 可以看出，实函数 $y_1(t)$ 如果以余弦形式表示，在复平面上对应的是一个新的相量 A' 在实轴上的投影及相角，相量 $A' = A \angle \varphi - 90^\circ$ ，它与相量 A 模相同，但相角落后 90° 。即： $A/A' = \angle \varphi - (\varphi - 90^\circ) = \angle 90^\circ = j = e^{j90^\circ}$ ，可见单位虚数 j 就是一个旋转因子（在数学教材中一般用 i 表示单位虚数，在电路中 i 一般表示电流，所以电学教材中通常用 j 表示单位虚数）。同理 $A'/A = \angle (\varphi - 90^\circ) - \varphi = \angle -90^\circ = -j = e^{j(-90^\circ)}$ 。

对比图 2.1.4 与图 2.1.5 及相关分析可知：

- 一个相量 $\mathbf{A}$ 的虚部对应一个正弦实函数 y_1 ，实部对应另外一个余弦（也可说是正弦）实函数 y_2 ；这两个不同的实函数成正交关系， $y_1^2 + y_2^2 = A^2$ 的关系成立；
- 一个正弦实函数 y_1 可以用一个相量 $\mathbf{A}$ 的虚部表示，也可以用与相量 $\mathbf{A}$ 成正交关系的相量 $\mathbf{A}'$ 的实部表示；相量 $\mathbf{A}'$ 落后相量 $\mathbf{A}$ 90° ， $\mathbf{A}/\mathbf{A}' = j$ ；

最后要强调的是：可以说正弦实函数对应一个相量，但不能说这个正弦实函数等于一个相量；因此下面两种写法，上面的是正确的，下面的是错误的。

- 正确： $y(t) \leftrightarrow \mathbf{A}$
- 错误： $y(t) = \mathbf{A}$

2.1.2 电阻 R (Resistor)

本章讨论的谐振电路也称 RLC 谐振电路，其中的 R 指的是电阻 (Resistor)，L 指的是电感 (Inductor)，C 指的是电容 (Capacitor)。电阻、电容、电感是三种重要的无源元件，这一节首先研究分析电阻。

● 电阻的特性

电阻是我们最为熟悉的无源电子元件，在中学物理课中就讲到了有关电阻的重要知识——欧姆定律：在同一电路中，通过某一导体的电流 (I) 跟这段导体两端的电压 (U) 成正比，跟这段导体的电阻 (R) 成反比；写成公式就是： $I=U/R$ 。理想电阻的伏安特性曲线是一条过零点的直线（图 2.1.6a）。

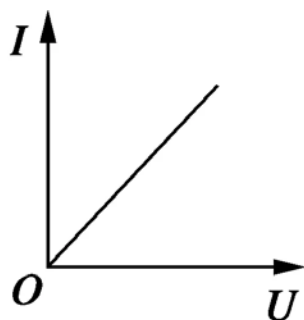


图 2.1.6a 线性电阻伏安特性曲线

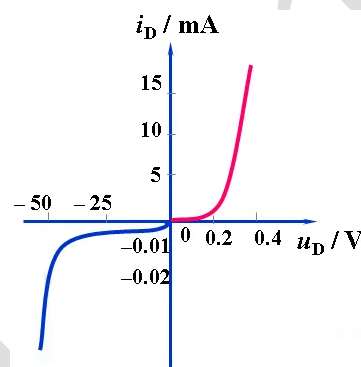


图 2.1.6b 二极管伏安特性曲线

需要指出的是以上所述特指线性电阻元件——电阻值 R 不随电压、电流变化，是一个固定值的理想电阻。我们在电路中还常常用到非线性电阻器件，也就是电阻值随着电压或电流发生变化的器件，二极管就是一类常见的具有非线性电阻特性的元件，其伏安特性曲线如图 2.1.6b 所示。

还有一种“负电阻”，即： $I=-U/R$ ；现实世界中无源负电阻元件是不存在的，但是可以通过电路搭建出来具有负电阻特性的有源电路，这种负电阻电路某些特殊场景会用到。后面提到的电阻器如非特别说明，均指线性理想电阻。

电阻的单位是欧姆 (Ω)， $1\Omega=1V/A$ 。为了电路分析方便，有时还用到一个物理量——电导 (G)，电导是电阻的倒数，即： $G=1/R$ 。电导的单位是西门子 (S)， $1S=1A/V=1/\Omega$ 。

● 电阻的串联与并联

我们在中学物理课就学过：电阻阻值越串越大，越并越小——这一点可以通过欧姆定律很容易证明得出。

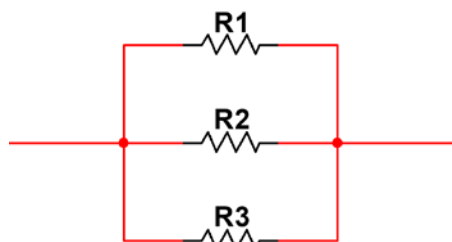


图 2.1.7a 并联电路（局部）



图 2.1.7b 串联电路（局部）

如图 2.1.7a 所示并联电路的总电阻 $R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$ (推导过程略); 如果我们用电导 (G) 来描述并联电路, 公式将变得很简洁: 令电阻 R_1 、 R_2 、 R_3 的电导分别为 G_1 、 G_2 、 G_3 , 即: $G_n = 1/R_n (n=1,2,3)$, 则图 2.1.7a 所示电路的总电导 $G = 1/R = G_1 + G_2 + G_3$ (过程略)。由此可见, 在并联电路中用电导分析要比电阻分析简单明了。

对于图 2.1.7b 所示串联电路的总电阻 $R = R_1 + R_2 + R_3$; 如果我们用电导 (G) 来描述, 则图 2.1.7b 所示电路的总电导 $G = 1/R = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{1/G_1 + 1/G_2 + 1/G_3} = \frac{G_1 G_2 G_3}{G_1 G_2 + G_2 G_3 + G_3 G_1}$; 由此可见, 在串并联电路中电阻与电导互为对偶关系。

● 电阻上电压与电流的关系

如果给电阻 R 两端加载一个正弦电压信号 $u(t)$, 根据欧姆定律: $u(t) = R \cdot i(t)$, 这表明流经电阻的电流信号 $i(t)$ 与两端电压信号 $u(t)$ 只是数值上的差别, 在相位上是一致的 (图 2.1.8)。

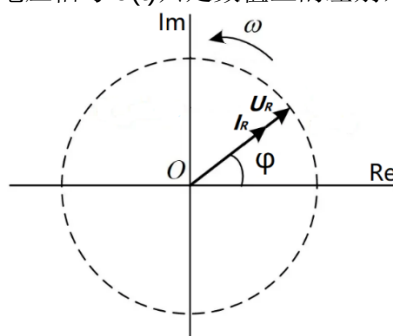


图 2.1.8 电阻上电压与电流信号相量图

从图 2.1.8 可以看到, 电阻上电压信号 U_R 与电流信号 I_R 在同一时刻只是大小不同, 但相位角是一样的, 都是 φ 。

有关电阻特性的知识比较简单, 就不安排实验了。

2.1.3 电容 C (Capacitor)

2.1.3.1 电容的基本特性

RLC 谐振电路中的 C 指的是电容 (Capacitor)。电容的种类多种多样,但本质上都是两片金属板中间夹上电介质 (空气也是一种电介质) 构成的 (图 2.1.9)。

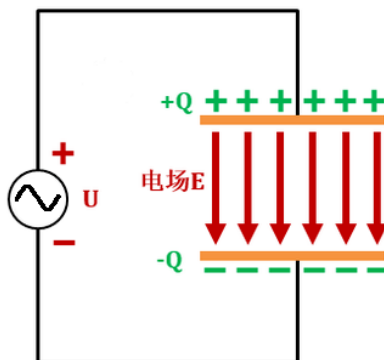


图 2.1.9 电容器模型

图 2.1.9 所示电容两极板上的电荷量 q 与极板间电压 u 有如下关系:

$$q = Cu \quad (\text{公式 2.1.5})$$

其中 q 是电量,单位是库伦 (C); u 是电压,单位是伏特 (V); C 就是电容,单位是法拉 (F), $1F=1C/V$, 法拉这个单位太大,常用的单位是微法 (μF)、纳法 (nF)、皮法 (pF), 它们之间的换算关系是 $1F=10^6\mu F=10^9nF=10^{12}pF$ 。

与电阻一样,电容也分为线性电容与非线性电容,理想线性电容器的电容值 C 是一个常数,由电容器的极板面积、极板间距、介电常数等参数决定,即: $C=\epsilon S/D$, 其中 ϵ 是电介质介电常数, S 为极板面积, D 为电解质厚度 (极板间距)。由这个公式可以看出,电容值与极板面积成正比,与极板间距成反比,这就决定了在串并联特性上电容与电阻相反,即: 电容越并越大 (并联相当于增大了极板面积 S), 越串越小 (串联相当于加大了极板间距 D)。后面的文章若无特殊说明,所述电容均指理想线性电容。

电容上电流与电压的关系

电阻上的电流与电压呈线性关系 (参考 2.1.2), 那电容上呢? 我们从公式 2.1.5 入手分析。若给电容 C 两端加载一个正弦电压信号 $u(t)=U_c \sin(\omega t + \varphi_u)$, 其中 U_c 是电压信号 $u(t)$ 的幅值, ω 是信号的角频率, φ_u 是电压信号 $u(t)$ 的相角。电容的电流信号 $i(t)=dq/dt=C*du(t)/dt=C\omega U_c \cos(\omega t + \varphi_u)=I_c \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ)=I_c \sin(\omega t + \varphi_i)$, 即:

$$i(t)=I_c \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (\text{公式 2.1.6})$$

其中:

- $I_c = C\omega U_c$;
- $\varphi_i = \varphi_u + 90^\circ$;

由此可见: 1. 当电容两端电压信号 $u(t)$ 的幅值 U_c 为一固定值, 电容上的电流信号 $i(t)$ 的幅值 I_c 不再是一个固定值, 它是信号的频率 ω 的函数; 2. 电容上电流信号的相角 φ_i 超前电压信号相角 φ_u 90° (图 2.1.10a, 图 2.1.10b)。

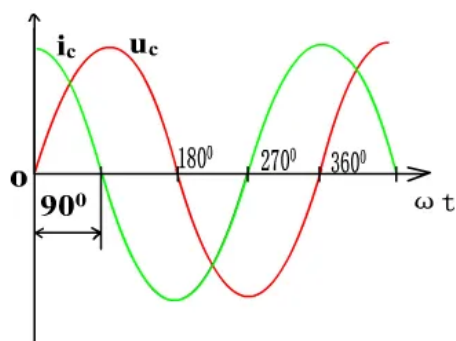


图 2.1.10a 电容上电流电压关系（时域）

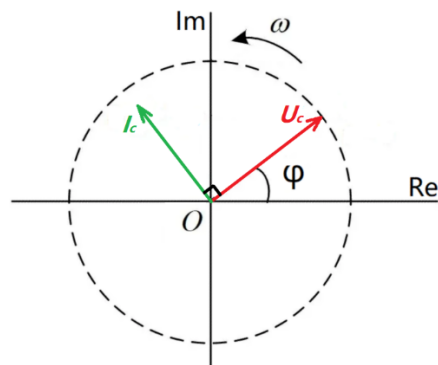


图 2.1.10b 电容上电流电压关系（复平面）

2.1.3.2 Lab2.1-1 电容特性实验

实验目的

- 通过 Multisim 仿真与实际电路观察电容上电流与电压相位关系
- 熟悉 HA-MB03A 电路分析实验板

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 短接线、剥线钳、镊子.....

实验过程

1. Multisim 仿真测量

通过实验验证一下在正弦信号激励下，电容上电流是否超前电压信号 90° 。示波器可以用来观察电压信号波形，但是无法观察电流信号（某些型号的示波器可以选配昂贵的电流探头），那这个实验该怎么做呢？首先按图 2.1.11a 在 Multisim 中搭建仿真电路。

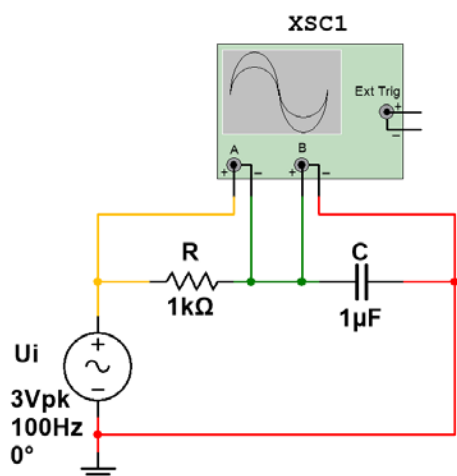


图 2.1.11a 差分示波器测量电容器电流电压关系

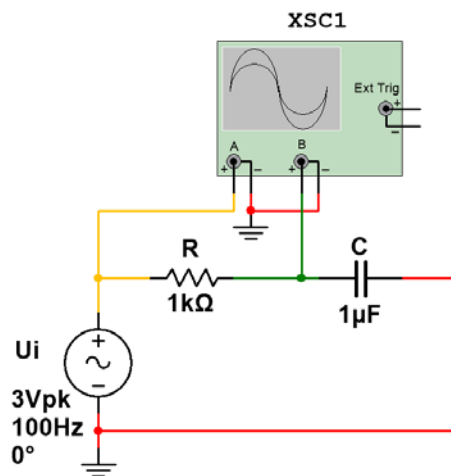


图 2.1.11b 单端示波器测量电容器电流电压关系

图 2.1.11a 所示电路由电阻 R 与电容 C 串联而成，串联电路中各处电流相等（大小、相位均相同），因此流经电阻 R 的电流信号 I_R 等于流经电容 C 的电流信号 I_C ，即： $I_R=I_C$ 。又因为电阻 R 上电压与电流具有线性关系，因此电阻 R 两端电压信号 U_R 的相位与电流信号 I_R 的相位相同，所以电阻 R 上电压信号 U_R 的相位与电容 C 上电压信号 U_C 的相位关系就是电容 C 上电流信号 I_C 与电压信号 U_C 的相位关系。根据前面分析， U_R 应该超前 U_C 信号 90° ；注意：这里 U_R 、 I_R 、 U_C 、 I_C ，以及输入信号 U_i 都是相量。

在 Multisim 中按照图 2.1.11a 搭建电路进行仿真，能够得到下面结果。

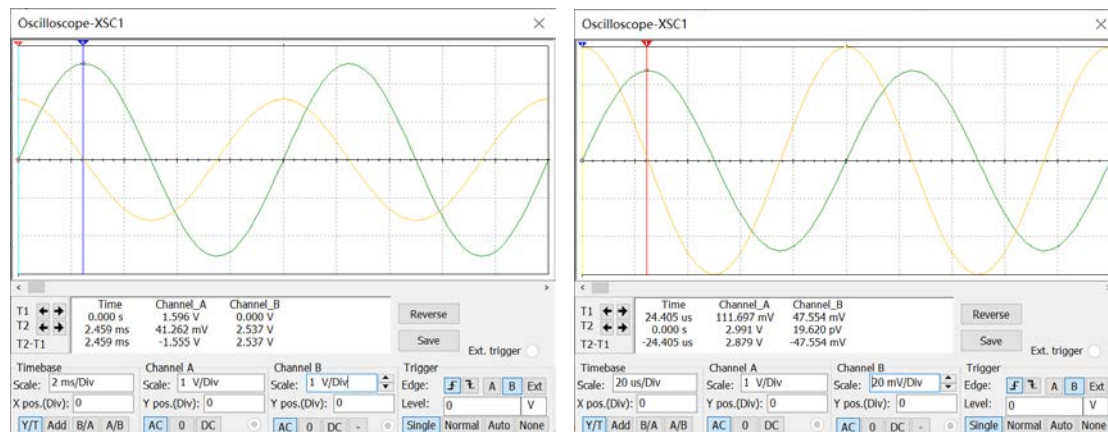


图 2.1.12 U_R (黄色)与 U_C (绿色)信号波形(左:100Hz; 右:10kHz)

图 2.1.12 左所示的是输入信号 U_i 为 100Hz 正弦波时， U_R 、 U_C 信号波形，可以看出 U_R 超前 U_C 信号 90° ，这证明了电容上电流信号 I_C 超前电压信号 U_C 90° 。如果把输入信号 U_i 的频率由 100Hz 调高到 10kHz，依然可以看到电容 C 上电流超前电压 90° （图右）。由此可见，无论输入信号 U_i 的频率怎么变化，电容 C 上的电流永远超前电压 90° ，只不过虽然输入信号 U_i 的幅值 U_c 保持不变，但随着输入信号频率的变化，电阻两端电压信号 U_R 的幅值与容两端电压信号 U_C 的幅值都在变化。

2. 实际电路测量

图 2.1.11a 所示电路我们无法用 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器进行测量，因为 HPI-1000(plus)口袋仪器的示波器是单端输入，也就是示波器 AB 两个通道的负端都已经默认接了地（GND），并且如果与 CALK-1000 电路分析实验套件中的 HA-MB03A 实验板直接连接（图 2.1.13），则口袋仪器的地（GND）与实验板的地（GND）也是连接在一起的。

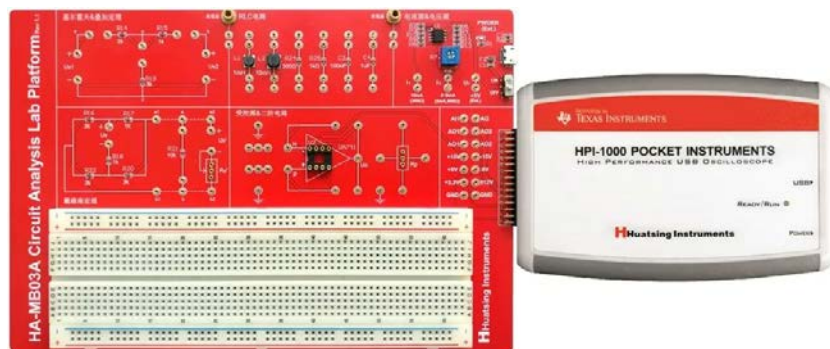


图 2.1.13 口袋仪器与电路分析实验板通过 HPI 接口直接连接

这样，使用单端示波器测量时，图 2.1.11a 所示电路将变为图 2.1.11b 所示结构，这时示波器 AB 两通道分别观察的是输入信号 U_i 与电容上的电压信号 U_C ，这二者之间的相位差还是 90° 吗？从仿真结果来看，当输入信号频率还是 100Hz 时，二者相位差明显小于 90° （图 2.1.14）。

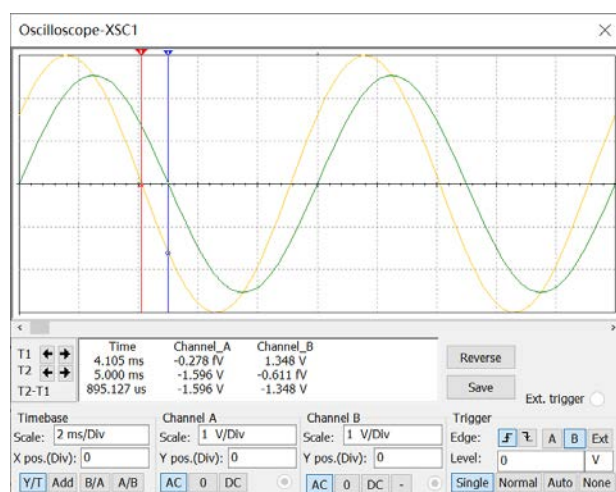


图 2.1.14 U_i (黄色)与 U_C (绿色)信号波形 (100Hz)

这是为什么呢？这是因为 U_i 、 U_R 、 U_C 、这三个正弦信号可以看作三个相量，它们之间的关系是： $U_i = U_R + U_C$ （公式 2.1.7）

三者之间的关系在复平面上如图 2.1.15 所示。

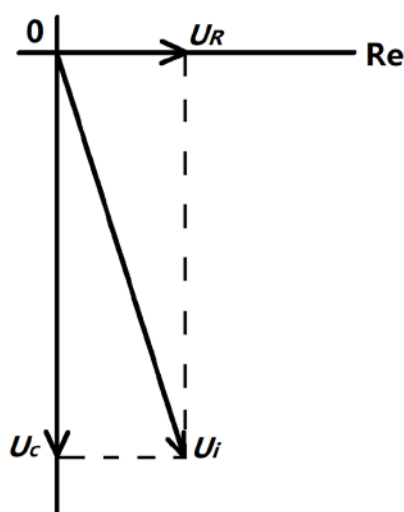


图 2.1.15 三个信号的复平面表示

图 2.1.15 把 U_R 画在复平面实轴 (Re) 上且方向朝向正端，那么落后其 90° 的 U_C 就应该画在虚轴 (Im) 上且方向朝向负端。这两个相量的相量和就是输入信号 U_i ，因此输入信号 U_i 不与电容电压信号 U_C 成固定的正交关系。当频率较低的时候，二者之间的夹角很小；随着频率增高，二者之间的夹角也随之变大，最终趋向于 90° 。需要说明的是：这里只是为了研究方便，通常把 U_R 相量画在实轴上，实际上 U_R 相量可以指向复平面任意角度，只是以下两点永远成立：

- U_C 与 U_R 成 -90° 的正交关系；
- U_C 、 U_R 、 U_i 构成矢量三角形；

通过以上分析可以知道，如果我们不能直接测量 U_R 信号，可以利用公式 2.1.7，通过 $U_i - U_C$ 得到 U_R 。下面我们在 HA-MB03A 实验板上搭建实际电路（图 2.1.16a），并用 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器进行测量，看看实际结果是否正确。

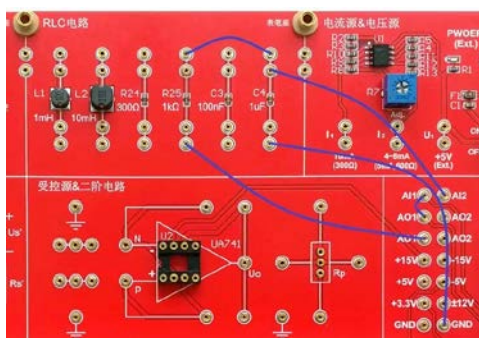


图 2.1.16a 实际电路

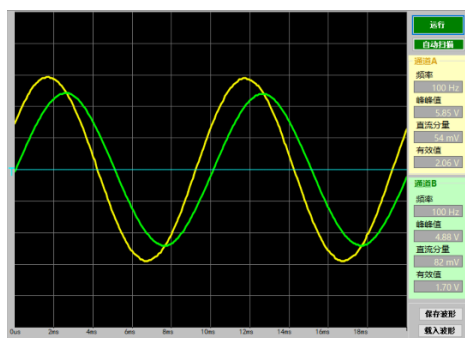
图 2.1.16b U_i (黄)与 U_C (绿)波形 (100Hz)

图 2.1.16a 电路等价于图 2.1.11b 所示电路，因此实际电路得到的波形（图 2.1.16b）与图 2.1.14 所示仿真波形也很相似。

图 2.1.16b 中黄色的波形是 U_i 信号（A 通道），绿色的波形是 U_C 信号（B 通道），这时打开示波器右侧控制面板上通道相减运算开关（DIFF），就能得到 A 通道减去 B 通道的信号，即 $U_i - U_C$ (U_R) 信号（图 2.1.17）。

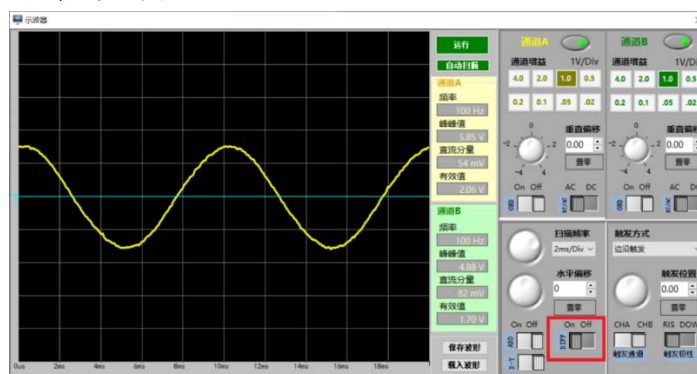


图 2.1.17 通道相减后的波形

图 2.1.17 所示波形就是 U_R 信号波形，它的相位也就是电容器上电流信号的相位，对比图 2.1.16b 中绿色 U_C 信号，可以发现电流信号超前电压信号 90° ，与前面的分析一致。

2.1.4 电感 H (Inductor)

2.1.4.1 电感的基本特性

RLC 谐振电路中的 L 指的是电感器 (Inductor) ——之所以用 L 而不用大写字母 I 表示电感, 一来 I 通常用来表示电流, 二来是为了纪念发现楞次定律的爱沙尼亚物理学家楞次 (Lenz)。

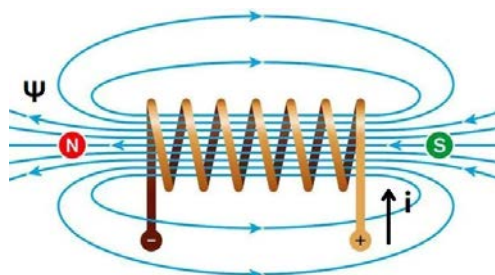


图 2.1.18 电感模型

电感种类很多, 但通常是由线圈构成的 (图 2.1.18), 电感上电流 i 与磁链 (全磁通) Ψ 之间有如下关系: $\Psi = L \cdot i$ (公式 2.1.18)

其中 Ψ 是磁链 (全磁通), 单位是韦伯 (Wb); i 是电流, 单位是安培 (A); L 就是电感, 单位是亨 [利] (H), $1\text{H} = 1\text{Wb/A}$, 亨这个单位比较大, 常用的单位是毫亨 (mH) 与微亨 (μH), 它们之间的换算关系是 $1\text{H} = 10^3\text{mH} = 10^6\mu\text{H}$ 。

与电阻、电容一样, 电感也有线性、非线性之分, 理想线性电感器的电感值 L 是一个常数, 是电感本身属性。后续若无特殊说明, 所述电感均指线性理想电感, 不存在内阻。

与电容一样, 电感也是一种非线性储能元件, 它的很多特性与电容形成对偶关系, 如果对 2.1.3 电容一节有了很好的掌握, 这节学习起来就会感觉很轻松。

电容上的电流超前电压 90° , 那电感上呢? 我们从公式 2.1.18 入手分析。让电感流入一个正弦电流信号 $i(t) = I_L \sin(\omega t + \varphi_i)$, 其中 I_L 是电流信号 $i(t)$ 的幅值, ω 是信号的频率, φ_i 是电流信号 $i(t)$ 的相角。则电感两端的电压:

$$u(t) = d\Psi/dt = L \cdot di(t)/dt = L\omega I_L \cos(\omega t + \varphi_i) = U_L \sin(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) = U_L \sin(\omega t + \varphi_u) \quad , \quad \text{即} \quad : \\ u(t) = U_L \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (\text{公式 2.1.19})$$

其中:

- $U_L = L\omega I_L$;
- $\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ$;

由此可见: 1. 当流经电感的电流信号 $i(t)$ 幅值 I_L 为一固定值, 电感器两端的电压信号 $u(t)$ 的幅值 U_L 不再是一个固定值, 它是信号的频率 ω 的函数; 2. 电感上电压信号的相角 φ_u 超前电流信号相角 φ_i 90° , 这点与电容正好相反 (图 2.1.19a, 图 2.1.19b)。

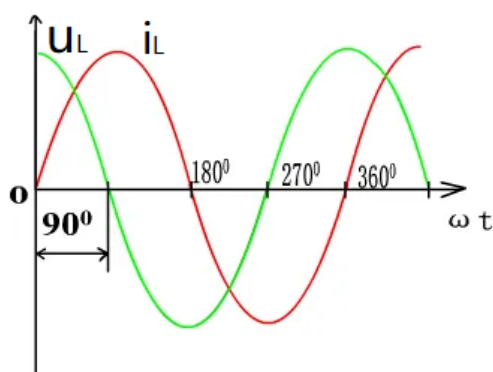


图 2.1.19a 电感上电流电压关系（时域）

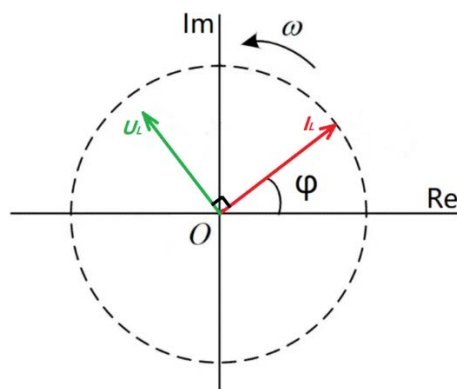


图 2.1.19b 电感上电流电压关系（复平面）

2.1.4.2 Lab2.1-2 电感特性实验

实验目的

- 通过实际电路观察电感上电流与电压相位关系
- 熟悉 HA-MB03A 电路分析实验板

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 短接线、剥线钳、镊子……

实验过程

在 CALK-1000 电路分析实验套件的 HA-MB03A 实验板上搭建电路，使用 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器进行测量，通过实验验证一下在正弦信号激励下，电感器上电压是否超前电流 90° ，参考图 2.1.20 搭建测量电路。

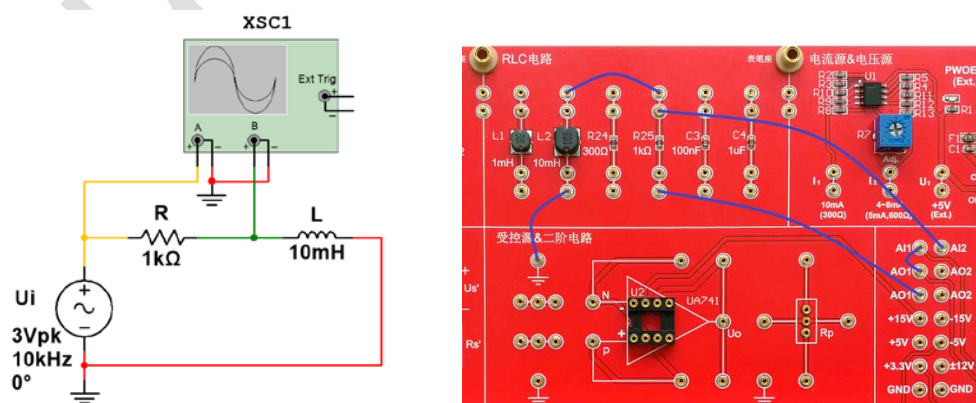


图 2.1.20 电感上电流电压关系测量电路原理图与实际接线

我们已经有了 [Lab2.1-1 电容特性实验](#) 的基础，这次不再进行 Multisim 仿真了，可以直接在实际电路上进行测量。把 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器 AO1 信号源设置为 $6V_{p-p}$ ，

$f=10\text{kHz}$ 的正弦波作为输入信号 U_i ，打开示波器界面能够通过 A、B 通道看到 U_i 信号与 U_L 信号（图 2.1.21a）。这时打开示波器右侧控制面板上通道相减运算开关（DIFF），就能得到 A 通道-B 通道的信号，即号 U_i-U_L (U_R) 信号（图 2.1.21b）。

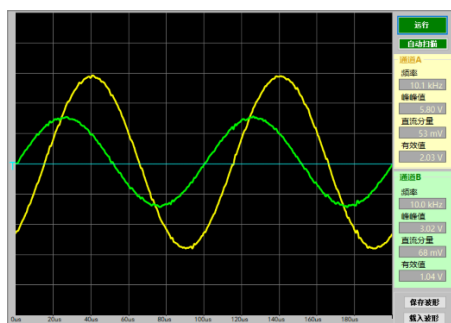


图 2.1.21a U_i (黄)与 U_L (绿)信号

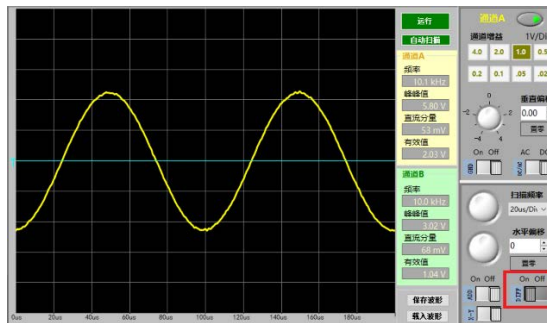


图 2.1.21b U_i-U_L (U_R)信号

图 2.1.21b 所示波形就是 U_R 信号波形，它的相位也就是电感器上电流信号的相位，对比图 2.1.21b 与图 2.1.21a 中 U_L 信号(绿色)，可以发现电感上电压信号超前电流信号 90° 。如果不明白为何 U_R 信号的相位也就是电感器上电流信号的相位，可以参考 [Lab2.1-1 电容特性实验](#) 中的分析。 U_i 、 U_R 、 U_L 三个信号如果以相量表示，有如下关系： $U_i=U_R+U_L$ ，三者关系在复平面上如图 2.1.22 所示。

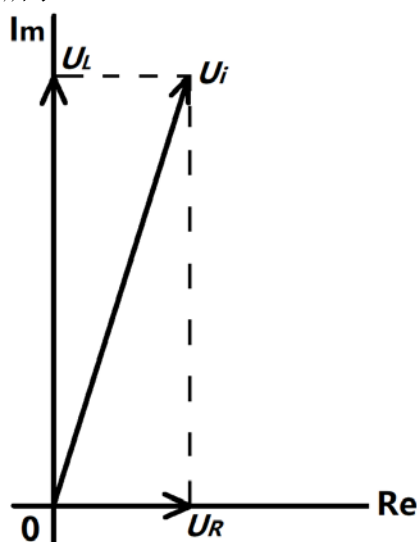


图 2.1.22 三个信号的复平面表示

对比[图 2.1.15](#)，再结合上面的分析，我们可知：电容上电压滞后电流 90° ，电感上电压超前电流 90° 。如果把电容与电感串接在同一个电路中，电容上的电压信号 U_C 与电感上的电压信号 U_L 相位差为 180° ，成反相关系——这正是后面讲到的 RLC 串联谐振电路里面要研究的问题。

2.1.5 阻抗与导纳 (Impedance & Admittance)

2.1.5.1 基本概念

● 阻抗 (Impedance)

根据欧姆定律: $R=U/I$, 对于电阻而言, 电阻的电压信号与电流信号是同步的 (没有相位差), 因此 R 是一个实数, 我们称之为阻值。对于电容与电感元件, 上面的电流与电压信号并不同步, 而是存在着 90° 相位差。我们用相量 U 表示器件上的电压, 用相量 I 表示器件上的电流, 根据公式 2.1.6 可知: 电容上 $U_C/I_C=1/\omega C \angle -90^\circ=1/j\omega C=-j/\omega C$, 令:

$$X_C=-1/\omega C \quad (\text{公式 2.1.20})$$

根据公式 2.1.9 可知: 电感上 $U_L/I_L=\omega L \angle 90^\circ=j\omega L$, 令:

$$X_L=\omega L \quad (\text{公式 2.1.21})$$

$-j/\omega C$ 与 $j\omega L$ 虽然是纯虚数, 但它们都是元件上电压与电流的比值, 表现出一种电阻的特性, 并且 $1/\omega C$ 与 ωL 的量纲与电阻一样, 都是 Ω , 因此我们把它命名为电抗 (Reactance), 用大写字母 X 表示, 具体而言: X_C 称为容抗 (<0), X_L 称为感抗 (≥ 0), 它们的单位都是 Ω 。电抗 X 与电阻 R 一样都是标量。

$-j/\omega C$ 与 $j\omega L$ 中的单位虚数 j 表示元件上电压与电流的相位关系: $-j$ 意味着电压滞后电流 90° , j 意味着电压超前电流 90° 。由此可见容抗与感抗是一对互相“抵消”的物理量, 在数学上就是互为正负。

电阻 R 与电抗 X 合称阻抗 (Impedance), 用大写字母 Z 表示, 对于图 2.1.23a 所示的 RLC 串联电路, 电路总的阻抗 $Z=R+jX=R+j(\omega L-1/\omega C)$ (公式 2.1.22)

阻抗 Z 是一个复数 (相量), 这样就把原来的实数阻值 (标量) 扩展到复数域了: 根据公式 2.1.20~2.1.22 可知: $Z_R=R$, $Z_L=j\omega L$, $Z_C=-j/\omega C$ 。欧姆定律也可以用相量进行表示了: $Z=U/I$ 。

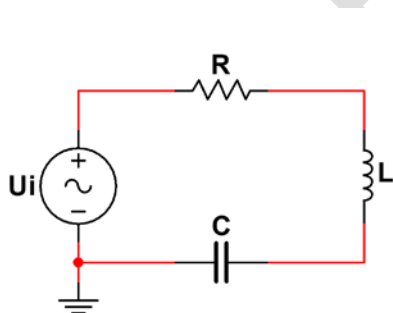


图 2.1.23a RLC 串联电路

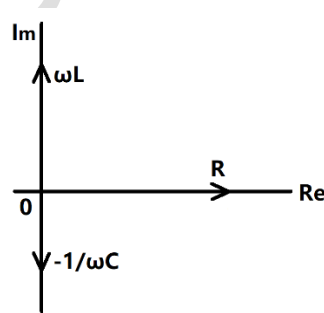


图 2.1.23b 阻抗的复平面表示

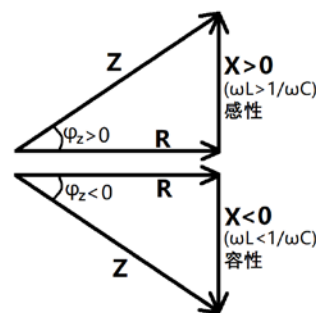


图 2.1.23c 阻抗三角形

图 2.1.23a 所示 RLC 串联电路中, 电阻为 R 、感抗 $X_L=\omega L$ 、容抗 $X_C=-1/\omega C$, 根据前面的分析, 可以在复平面上标出它们的关系 (图 2.1.23b); 也可以用相量三角形的形式表示它们的关系 (图 2.1.23b), 图中的 φ_z 称为阻抗角。

图 2.1.3c 所示阻抗三角形:

- 上边是感抗绝对值大于容抗绝对值 ($\omega L > 1/\omega C$) 的情形, 感抗与容抗之和表现为感抗, 我们称电路呈感性;
- 下边是容抗绝对值大于感抗绝对值 ($\omega L < 1/\omega C$) 的情形, 感抗与容抗之和表现为容抗, 我们称电路呈容性;

- 当感抗、容抗绝对值相等 ($\omega L=1/\omega C$) 时, 感抗与容抗相互抵消, 电路呈阻性。

● 导纳 (Admittance)

阻抗 Z 是把实数域上的电阻 R 扩展到了复数域, 相对应的也可以把实数域上的电导 G 扩展到复数域——这就是导纳 Y (Admittance)。对于图 2.1.24a 所示并联电路, 用导纳分析比用阻抗分析简洁得多。

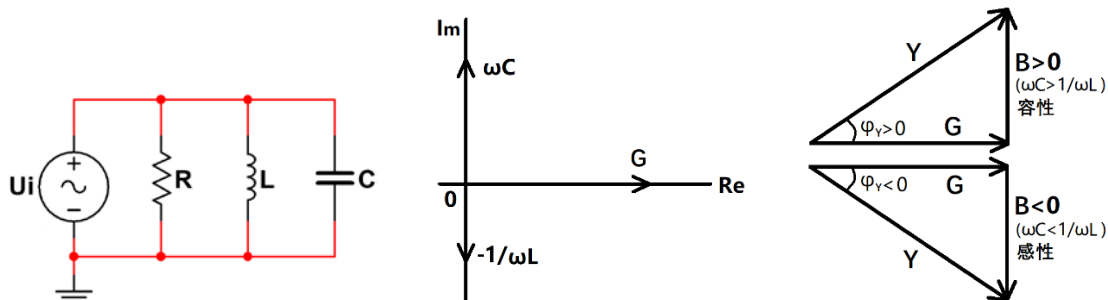


图 2.1.24a RLC 并联电路

图 2.1.24b 导纳的复平面表示

图 2.1.24c 导纳三角形

图 2.1.24a 所示 RLC 并联电路中, 电阻 R 的电导值为 G (Conductance), 电感上的感纳 $B_L=1/\omega L$, 电容上的容纳 $B_C=\omega C$, 感纳和容纳合称为电纳 (Susceptance), 用大写字母 B 表示。电纳与电导都是标量, 导纳 Y 是一个相量。

图 2.1.24a 所示电路的导纳 $Y=G+jB=G+j(\omega C-1/\omega L)$ 。

导纳也可以仿照图 2.1.23b、2.1.23c 将电路的中各元件的导纳画在复平面内 (图 2.1.24b), 或是画出导纳三角形 (图 2.1.24c), 图中的 ϕ_Y 称为导纳角。导纳角与图 2.1.23c 中的阻抗角 ϕ_Z 之和为零, 即: $\phi_Y=-\phi_Z$ 。

由图 2.1.24c 可知:

- 电纳 $B>0$ ($\omega C>1/\omega L$), 电路呈容性;
- 电纳 $B<0$ ($\omega C<1/\omega L$), 电路呈感性;
- 电纳 $B=0$ ($\omega C=1/\omega L$), 感纳与容纳相互抵消, 电路呈阻性;

阻抗与导纳成对偶关系, 具体存在如下关系:

- 感抗与感纳成负倒数关系, 即: $X_L=-1/B_L$;
- 容抗与容纳成负倒数关系, 即: $X_C=-1/B_C$;
- 电抗与电纳成倒数关系, 即: $X=1/B$;
- 电阻与电导成倒数关系, 即: $R=1/G$;
- 阻抗与导纳成倒数关系, 即: $Z=1/Y$;

对比图 2.1.23 与图 2.1.24, 可以看出, RLC 串联谐振电路与并行谐振电路很多地方也成对偶关系, 这一点在后续分析中大家会有更深刻的体会。

2.1.5.2 Lab2.1-3 电容值与电感值简单测量实验

实验目的

- 利用前面所学阻抗知识初步学会测量电容值与电感值的方法;

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子.....

实验过程

● 电容值的测量

我们已经学了电容、电感的特性以及阻抗的知识，下面利用这些特性做两个小实验。首先利用不带电容测量功能的万用表及 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器测量电容值，电路如图 2.1.25a 所示。

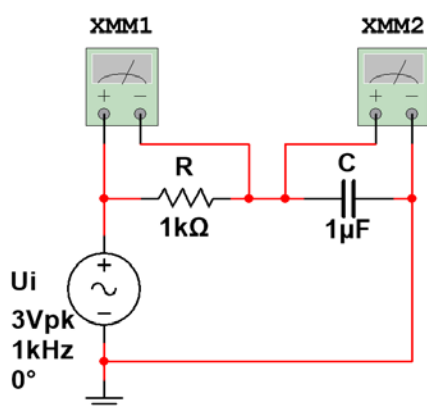


图 2.1.25a 电容测量电路

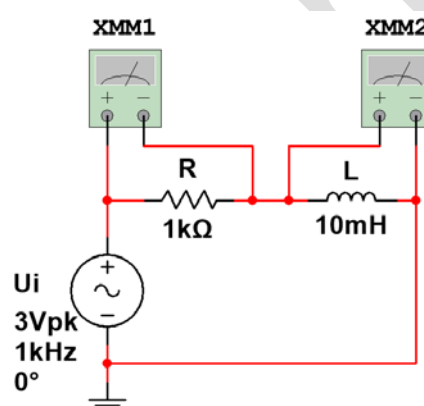


图 2.1.25b 电感测量电路

电路图虽然是在 Multisim 中画的，但这几个实验做仿真没有意义，一定要在 HA-MB03A 实验板上或面包板上搭建实际电路完成。

图 2.1.25a 电路很简单，把电阻 R 和电容 C 串联在一起，然后用 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器的 AO1 信号源给电路输入一个峰-峰值 $6V_{p-p}$ ，频率 $1kHz$ 的正弦波作为输入信号 U_i ，然后用万用表的交流电压 (AC) 档分别测量电阻 R 两端的电压 (记为 U_R) 与电容 C 两端的电压 (记为 U_C)。因为串联电路里电流处处相等，所以 $U_R/R = U_C/(1/\omega C)$ ，因此 $C = U_R/(U_C R \omega)$ ，其中 $\omega = 2\pi f$ 。

用上述方法测量 HA-MB03A 实验板上标称值为 $1\mu F$ 的贴片电容，实际测量计算结果是 $0.88\mu F$ 左右。如果用 CALK-1000 电路分析实验套件中标配的 UT120C 万用表的电容档去测量 (测量时要把电容从电路隔离出来)，大约也是 $0.88\mu F$ ，这说明上述方法的可行的。如果我们改变输入信号 U_i 的频率，测得的电容值会有一定变化。其原因是我们之前讲解分析的都是理想电容，实际电容都不是理想的，元件会有内阻与寄生电感，电容容值也会随信号频率发生一定变化。

● 电感值的测量

仿照上面的实验，还可以搭建图 2.1.25b 所示电路进行电感值的测量。这个实验同样要搭建实际电路测量，做仿真没有意义。

根据 $U_R/R = U_L/(\omega L)$ ，得到： $L = RU_L/(\omega U_R)$ ，其中 $\omega = 2\pi f$ 。测量 HA-MB03A 实验板上标称值为 $10mH$ 的工字电感器，当输入信号 U_i 的频率为 $1kHz$ 时，实际测量计算得到的感值

是 14.2mH，与标称值有较大区别。如果我们改变输入信号 U_i 的频率，有可能得到偏离标称值更大的测量值。这主要是由于电感线圈具有较大内阻造成的，从而造成测量误差。在后面的实验中将讲授排除内阻干扰，比较准确测量电感感值的方法。

如果换用内阻比较小的电感按照上述方法测量就能得到比较准确的电感值。图 2.1.26 中的器件叫做扼流圈（也叫扼流环），是一种特殊的电感器，它的内阻要比左边的工字电感小很多。对于标称值 10mH 的扼流圈，我们在 100~10kHz 范围内改变输入信号的频率，测量计算得到的扼流圈感值是 10.5~11.1mH 之间，误差比刚才用工字电感测量时小很多。



图 2.1.26 工字电感与扼流圈电感

扼流圈的内阻虽然小，但是它的体积却比旁边的贴片工字电感大许多，这对于很多小型电子产品是非常不方便的。相对电阻、电容而言，电感器也是很难做进集成电路芯片里面去，如果电路中必须要用到电感器，通常只能放置在外电路电路中。

这个实验有一点需要说明：我们用万用表测量电阻、电容、电感两端的交流信号的电压值，得到的读数并不准确，而是比真实值有一定衰减。这是因为我们用的普通万用表测量交流信号的带宽一般是 40~400Hz（UT120C 万用表的技术参数见附录 B），实验中的输入信号是 1kHz 的正弦波，超出了设备的频响范围。但这并不影响我们用普通万用表做这个实验，因为我们测量容值或感值时用到的是电阻两端电压与电容（或电感）两端电压的比值，这样衰减造成的影响就在分子与分母上相互抵消了，后续很多实验项目还会用到这个技巧。

2.1.6 总结

这一节内容难度不高，但是基本概念与定义很多，要彻底弄清楚，不要模棱两可，否则会对后面的学习造成困扰。

● 基本元件与物理量

	R	C	L	说明
元件	电阻器 (resistor)	电容器 (capacitor)	电感器 (inductor)	为了叙述简洁，“器”字常省略，要根据上下文判断说的是元件还是元件的物理量。
物理量	电阻 R (resistance)	电容 C (capacitance)	电感 L (inductance)	
定义式	$R=U/I$	$C=q/U$	$L=\Psi/i$	相比定义式，计算公式更能体现器件的特性，能够看出器件是由哪些材料属性与物理量决定的。
计算公式	$R=\rho L/S$	$C=\epsilon S/D$	$L=\mu S N^2/L$	
单位	欧[姆] (Ω)	法[拉] (F)	亨[利] (H)	
特性	串联增加 并联减小	串联减小 并联增大	串联增加 并联减小	
参考	2.1.2	2.1.3	2.1.4	

表 2.1.1 电阻、电容、电感总结

● 阻抗与导纳

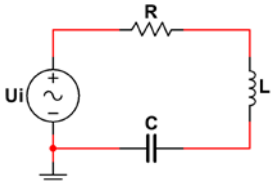
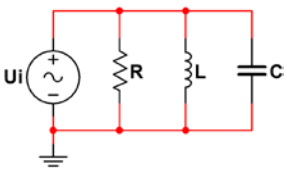
	阻抗体系	导纳体系	关系	说明
阻抗/导纳	阻抗(impedance, 相量) $Z=R+jX$	导纳(admittance, 相量) $Y=G+jB$	$Y=1/Z$	电阻与电抗 合称阻抗 电导与电纳 合称导纳
电阻/电导	电阻 R(resistance, 标量) $Z_R=R$	电导 G(conductance, 标量) $Y_R=G$	$G=1/R$	
电抗/电纳	电抗 X(reactance, 标量) $Z_X=jX$	电纳 B(susceptance, 标量) $Y_B=jB$	$B=1/X$	
感抗/感纳	感抗 $X_L=\omega L$ (标量) $Z_L=j\omega L$	感纳 $B_L=-1/\omega L$ (标量) $Y_L=-j/\omega L$	$B_L=-1/X_L$	感抗与容抗 合称电抗
容抗/容纳	容抗 $X_C=-1/\omega C$ (标量) $Z_C=-j/\omega C$	容纳 $B_C=\omega C$ (标量) $Y_C=j\omega C$	$B_C=-1/X_C$	感纳与容纳 合称电纳
单位	欧[姆] (Ω)	西门子 (S)	$1S=1/\Omega$	
适用	 串联电路 $Z=R+j(\omega L-1/\omega C)$	 并联电路 $Y=G+j(\omega C-1/\omega L)$	$Y=1/Z$	参考 2.1.5

表 2.1.2 阻抗与导纳关系总结

2.2 RLC 串联谐振电路

2.2.1 Lab2.2-1 串联谐振电路基本特性

实验目的

- 熟悉串联谐振电路基本特性；
- 观察仿真电路与实际电路间的差别；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)多功能口袋仪器
 - b) 短接线、剥线钳、镊子.....

实验过程

图 2.1.23a 所示 RLC 串联谐振电路的阻抗 $Z=R+j(\omega L-1/\omega C)=|Z|\angle\varphi_z$ ，当 $\omega L=1/\omega C$ ，也就是感抗与容抗的绝对值相等时，因为感抗与容抗互成正负（反相）关系，所以电路的电抗 $X=0$ 。此时电路中的阻抗 Z 最小，并且呈现纯阻性，即： $Z_0=R$ 。

由 $\omega L=1/\omega C$ 解出： $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 或 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ (公式 2.2.1)

我们称 ω_0 为电路的**谐振频率**。后续将谐振状态下的物理量都加下角标 0 加以区别，比如： $\omega_0(f_0)$ 为电路的谐振频率， I_0 为电路谐振时的电流。本节所述的电路通常都指 RLC 串联谐振电路。

当电路进入谐振状态后，电路的阻抗最小，电流最大，即： $I_0=U_s/Z_0=U_s/R$ (公式 2.2.2)

由此可见，谐振时电路的电流 I 与激励源 U_s 相位相同（同相），此时电阻 R 上的电压 $U_R=U_s$ 。这也是电路进入谐振状态的定义，即：在一定频率的交流激励信号作用下，电路的干路电压与干路电流达到同相，我们称电路进入**谐振状态**。这个定义不但适用于 RLC 串联谐振电路，对于 2.3 节并联谐振电路同样适用。

我们按图 2.2.1 搭建仿真电路与实际电路。

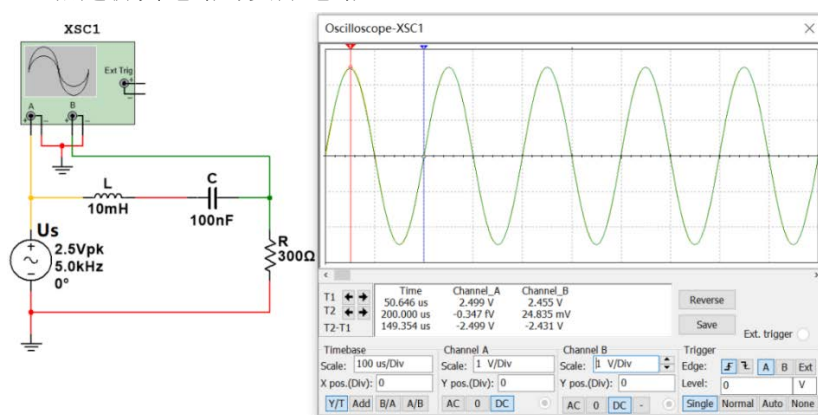


图 2.2.1 RLC 串联谐振电路及仿真波形

将图 2.2.1 电路中的 $L=10\text{mH}$, $C=0.1\mu\text{F}$ 代入公式 2.2.1, 计算得: $f_0=\omega_0/2\pi=5.0\text{kHz}$ 。因此当输入信号的频率为 5.0kHz 时, 从图 2.2.1 仿真结果上看: 电阻 R 上的信号波形与输入信号波形基本重合在一起, 这说明 U_R 与 U_S 的大小、相位都相同。

按照图 2.2.1 电路在 HA-MB03A 实验板上搭建实际电路, 当 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器 AO1 信号源产生一个 $5\text{V}_{\text{p-p}}$, 频率为 5kHz 的正弦波作为输入信号时, 从示波器上能看到图 2.2.2 所示实际波形。

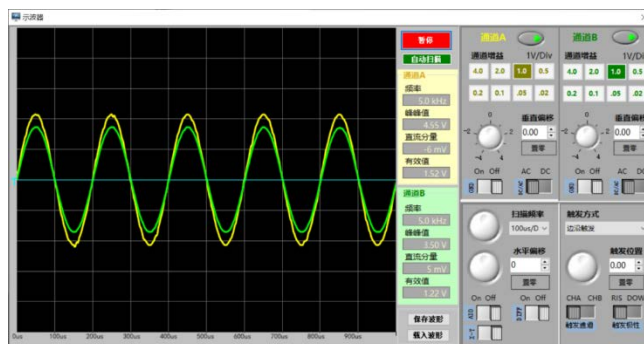


图 2.2.2 RLC 串联谐振电路实际波形

图 2.2.2 中黄色的是输入信号 U_S , 绿色的是电阻 R 上的信号 U_R , 谐振时实际电路中 U_R 比 U_S 幅值小一些主要是因为实际电路中的电感、电容都不是理想元件, 存在一定的内阻, 分去了输入信号 U_S 的一部分电压。

2.2.2 谐振曲线与品质因数

2.2.2.1 谐振曲线

Lab2.2-1 实验分析了电路进入谐振状态后电阻上的电压信号 U_R 与输入信号 U_S 的关系，那电路没有进入谐振状态时，它们的关系又是怎么样呢？请看图 2.2.3。

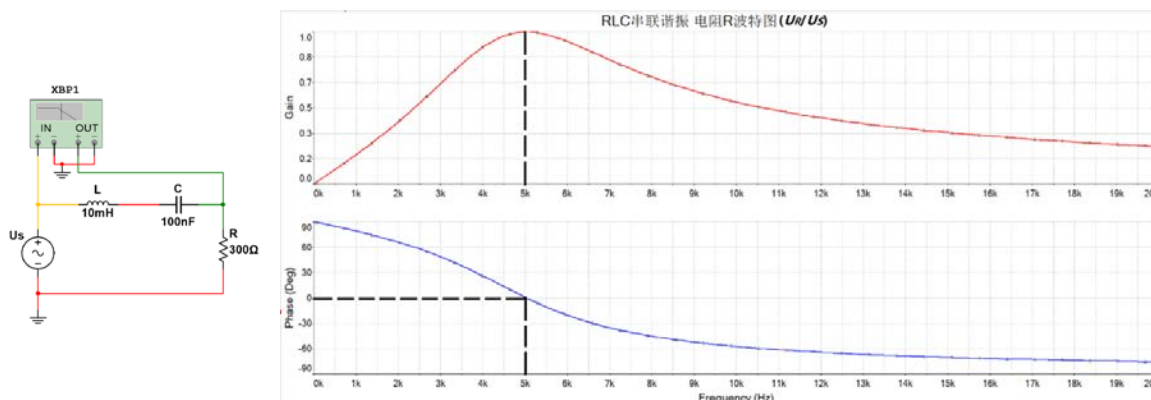


图 2.2.3 利用波特图仪测量 U_R 与 U_S 信号的幅频、相频关系

借助 Multisim 软件中的波特图仪绘制出输入信号频率 0~20kHz 区间变化时，电阻上的电压信号 U_R 与输入信号 U_S 的幅频关系曲线（红色）与相频关系曲线（蓝色）。因为电路中的电流 $I=U_R/R$ ，根据公式 2.2.2: $I_0=U_S/R$ ，得到: $I/I_0=U_R/U_S$ (公式 2.2.3)

这说明图 2.2.3 所示的曲线就是: $I/I_0-\omega(f)$ 幅频关系与相频关系曲线，这条曲线称为**谐振曲线**，有时候也用: $I/I_0-\omega/\omega_0$ 表示，即横轴与纵轴都做归一化处理。谐振曲线的数学表达式是: $I/I_0=(U_S/Z)/(U_S/Z_0)=Z_0/Z=R/Z=\frac{R}{|Z|\angle\varphi_z}=\frac{R}{|Z|}\angle\varphi_{-z}$ (公式 2.2.4)

其中电路的阻抗 Z 是图 2.2.3 电路中电阻、感抗、容抗三个相量的相量和， $\angle\varphi_z$ 是阻抗角（图 2.1.23c）。

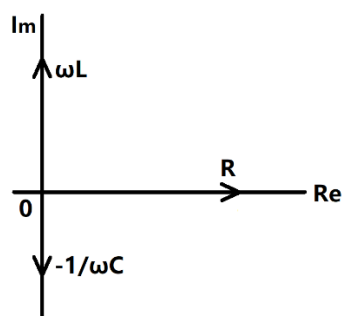


图 2.1.23b 阻抗复平面

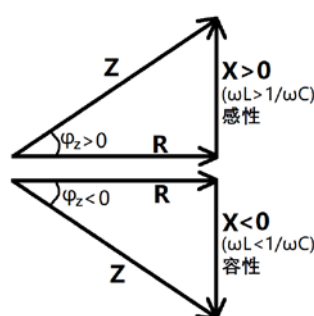


图 2.1.23c 阻抗三角形

为了阅读方便，把图 2.1.23b、图 2.1.23c 在这里重新绘制一遍，从中可以看出：

- 当 $\omega < \omega_0$ 时: $|Z|$ 很大, $\angle\varphi_z$ 趋向于 -90° ; 所以 $R/|Z|$ 趋向于 0, $\angle\varphi_{-z}$ 趋向于 $+90^\circ$;
- 当 $\omega = \omega_0$ 时: $|Z|=R$, $\angle\varphi_z=0^\circ$; 所以 $R/|Z|=1$, $\angle\varphi_{-z}=0^\circ$;
- 当 $\omega > \omega_0$ 时: $|Z|$ 很大, $\angle\varphi_z$ 趋向于 $+90^\circ$; 所以 $R/|Z|$ 趋向于 0, $\angle\varphi_{-z}$ 趋向于 -90° ;

所以图 2.2.3 所示谐振关系曲线呈现一个中心（频率轴 f_0 处）凸起，相角由 90° 经 0° （频率 f_0 时）转向 -90° 这样的幅频关系与相频关系。

公式 2.2.3 中的 I/I_0 是串联谐振曲线的定义式；其等价表示 U_R/U_S 我们称之为测量式，因为测量绘制谐振曲线时要测量这两个物理量；公式 2.2.4 中的 R/Z 我们称之为本质式，因为它反映串联谐振曲线的本质；三者之间等价，即： $I/I_0=U_R/U_S=R/Z$ 。

2.2.2.2 品质因数 (Quality factor)

RLC 串联电路发生谐振时， $Z_0=R$ ——似乎电路中的电感、电容元件都不存在了，只有电阻 R （图 2.2.4）了，这是为什么呢？

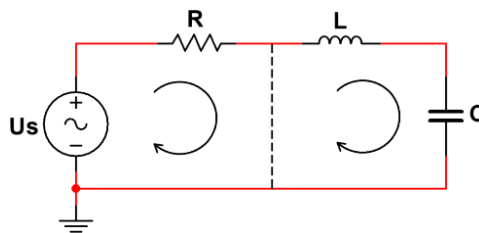


图 2.2.4 发生谐振时的 RLC 串联电路

这是因为电感与电容都是储能元件，当电路发生谐振时，能量在电感与电容之间相互转移，信号源 U_S 提供的能量只消耗在电阻 R 上。

根据定义：无功功率 $Q_P=UI\sin\theta$ ，其中 $\theta=\varphi_U-\varphi_i$ 。因此图 2.2.4 电路发生谐振时，电感上的无功功率 $Q_{PL}=I_0^2X_L*\sin90^\circ=I_0^2\omega_0L=I_0^2L/\sqrt{LC}=I_0^2\sqrt{L/C}$ 。电容上的无功功率 $Q_{PC}=I_0^2X_C*\sin-90^\circ=-I_0^2/(\omega_0C)=-I_0^2\sqrt{L/C}$ ，对比 Q_{PL} 与 Q_{PC} ，我们发现二者大小相等，只是一正一负。这说明发生谐振时，电感释放能量时电容吸收能量，下一个周期电容释放能量时电感吸收能量，能量在电感与电容之间相互传递，没有损耗。这当然是理想状况，实际的电感与电容都有内阻，都要消耗一定能量转换为热能释放掉。

此时电阻 R 上消耗的有功功率 $P=I_0^2R$ 。我们把谐振时储能元件（电感、电容）上储存的功率（无功功率）与电阻上消耗掉的有功功率之比，称为谐振电路的品质因数 Q (Quality

factor)，因此 $Q=Q_P/P$ ，即： $Q=\frac{\sqrt{L/C}}{R}$ (公式 2.2.5)

将公式 2.2.1: $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 代入公式 2.2.5，得到： $Q=\omega_0L/R=1/(\omega_0CR)$ ，从中可以看出：

串联谐振电路品质因数其实就是谐振时感抗（或容抗）与电路中电阻的比值，我们把谐振时的感抗（或容抗）称为特性阻抗，用希腊字母 ρ 表示，即：

$$\rho=\omega_0L=1/(\omega_0C)=\sqrt{L/C} \quad (\text{公式 2.2.6})$$

品质因数 Q 是一个无量纲的数，它影响着谐振电路很多特性，是研究谐振电路时经常要用到的重要参数。这里需要特别强调的是：公式 2.2.5 仅仅适用于串联谐振电路，不适用于并联谐振电路——这一点在后面的并联谐振一节中会进行讲解分析。

2.2.3 Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制

实验目的

- 学习串联谐振曲线绘制的实验技巧；
- 分析研究串联谐振曲线的物理意义；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子……

实验说明

这个实验原理不难，但是对测量精度与实验技巧要求比较高，否则绘制出来的曲线与理论值可能会有较大误差。绘制完谐振曲线并不是实验的结束——恰恰相反，可能意味着深入学习过程的开始——利用前面学到的理论知识对曲线进行分析才是这个实验的主要目的。

实验过程

通过 [Lab2.2-1 串联谐振电路基本特性](#) 实验，我们知道测量不同频率下串联电路中电阻 R 上的电压 U_R 与输入信号 U_s 的比值就能得到谐振曲线中的幅频关系曲线 ($I/I_0 \sim f$)，测量 U_R 与 U_s 的相位差就能得到谐振曲线中的相频关系曲线 ($\varphi \sim f$)。本实验测量绘制谐振曲线中的幅频关系曲线。

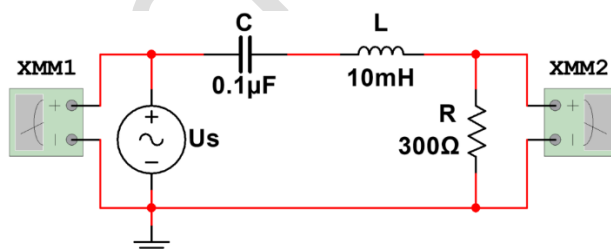


图 2.2.5 串联谐振曲线测量电路

按照图 2.2.5 在 HA-MB03A 实验板上搭建电路，让 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器的 AO1 信号源产生一个 $6V_{p-p}$ ，频率 $0.5 \sim 9.5\text{kHz}$ 范围区间的正弦波作为输入信号 U_s 。用万用表交流电压 (AC) 档测量电阻两端电压 U_R 与输入信号两端的电压 U_s ；然后改变输入信号的频率，再记录下一组电压值。最后将电压值 U_s 、 U_R 与对应的输入信号频率 f 记录在一个 Excel 表格中 (表 2.2.1)。为了提高测量精度，测量过程有以下几点需要注意：

- 使用 UT120C 万用表交流电压 (AC) 档测量电压值，不要用示波器测量电压值；
- 每次调整输入信号的频率时虽不调整幅值，但改变频率后**必须**重新测量电压值 U_s ；
- 要用套件中配套的专用导线连接电路，并且导线要用剥线钳剪切到合适的长度，不可过长；
- 为了读数准确，应将万用表表笔固定在 HA-MB03A 实验板上专用的表笔座上，然后用套件中配备的红黑杜邦线插入器件孔，待读数稳定后再记录 (图 2.2.6)；

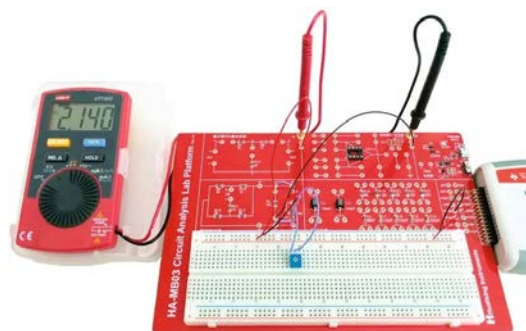


图 2.2.6 将万用表表笔插入 HA-MB03A 实验板专用表笔座

频率 (kHz)	R=300Ω			R=100Ω		
	U _s (V)	U _R (V)	U _R /U _s	U _s (V)	U _R (V)	U _R /U _s
0.5	2.088	0.203	0.097	2.089	0.068	0.033
1	2.055	0.403	0.196	2.063	0.137	0.066
1.5	2.005	0.598	0.298	2.021	0.212	0.105
2	1.938	0.781	0.403	1.962	0.294	0.150
2.5	1.856	0.949	0.511	1.877	0.39	0.208
3	1.771	1.076	0.608	1.774	0.492	0.277
3.5	1.677	1.174	0.700	1.626	0.612	0.376
4	1.6	1.213	0.758	1.479	0.702	0.475
4.5	1.533	1.21	0.789	1.369	0.74	0.541
4.7	1.514	1.198	0.791	1.342	0.738	0.550
4.8	1.504	1.191	0.792	1.331	0.734	0.551
4.9	1.493	1.183	0.792	1.323	0.727	0.550
5	1.487	1.18	0.794	1.318	0.718	0.545
5.2	1.46	1.149	0.787	1.311	0.693	0.529
5.5	1.439	1.121	0.779	1.312	0.657	0.501
6	1.396	1.047	0.750	1.318	0.567	0.430
6.5	1.356	0.967	0.713	1.314	0.49	0.373
7	1.317	0.886	0.673	1.295	0.412	0.318
7.5	1.279	0.813	0.636	1.272	0.363	0.285
8	1.24	0.74	0.597	1.241	0.315	0.254
8.5	1.205	0.679	0.563	1.2	0.271	0.226
9	1.167	0.621	0.532	1.176	0.249	0.212
9.5	1.129	0.567	0.502	1.123	0.21	0.187

表 2.2.1 测量数据

需要注意的是表 2.2.1 中记录的电压值并不是电路中真实的交流电压有效值，这是因为大多数手持式万用表的交流电压频响频率范围在 40~400Hz 左右，随着信号频率上升，测量读数有所衰减，但这并不影响我们在同一频率下得到的 U_R/U_s 电压比值的正确性。另外，为了准确找出谐振频率，在理论谐振频率（5kHz）附近，将输入信号频率增加步长由 500Hz 减小到 100Hz，加密采样点。

根据公式 2.2.3，表 2.2.1 中 U_R/U_s 的比值就是 I/I_0 ；以 I/I_0 数值为纵轴，输入信号频率 f 为横轴绘制的曲线就是 RLC 串联电路谐振曲线的幅频曲线（图 2.2.7）。

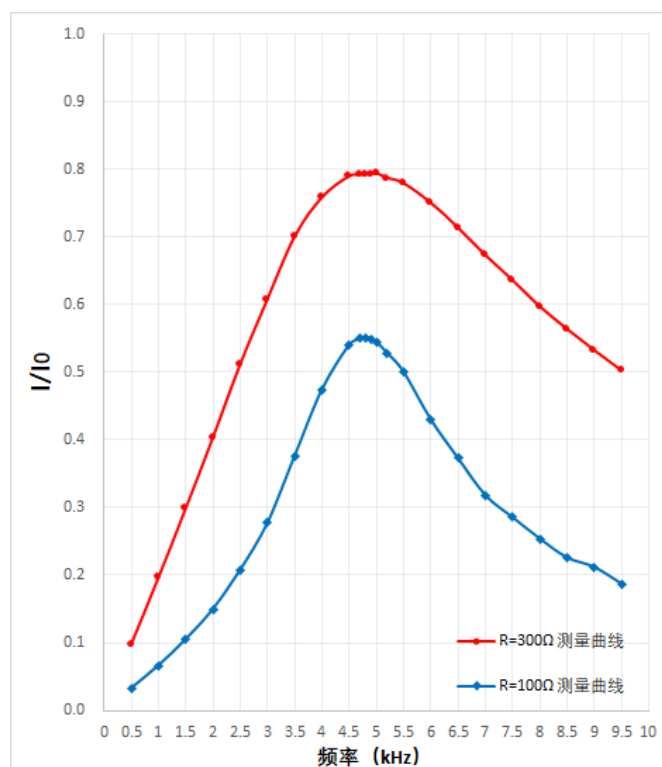


图 2.2.7 串联谐振曲线（幅频曲线）

图 2.2.7 中红色的是 $R=300\Omega$ 时的谐振曲线，蓝色的是 $R=100\Omega$ 时的谐振曲线。根据公式 2.2.5 可知，蓝色谐振曲线品质因数 Q 大于红色的。由此可见，品质因数影响谐振曲线的形状——品质因数越大，谐振峰越陡峭，反之则越平缓。

根据前面的理论分析，当发生谐振时 $I/I_0=1$ ，但是图 2.2.7 中两条谐振曲线在谐振时都没有达到 1——尤其是 $R=100\Omega$ 时， I/I_0 只有 0.55 左右，这是为什么呢？另外，很多教材中绘制的谐振曲线都是以谐振频率为轴，左右对称的一条曲线，这里通过实验测量得到的曲线左右好像不太对称，这又是什么原因？接下来对这两个问题进行分析。

实验分析

图 2.2.7 谐振曲线当发生谐振时 I/I_0 比值小于 1 的主要原因是电路中的元件不是理想元件造成的。本章之前讲述分析电阻、电容、电感特性时使用的都是理想模型，但是实际元件与理想模型之间是有差别的（图 2.2.8）。

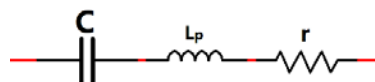


图 2.2.8a 实际电容简化模型

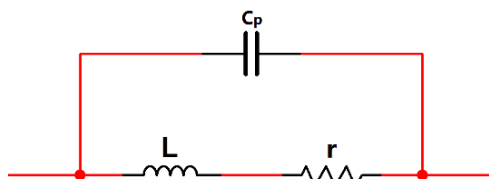


图 2.2.8b 实际电感简化模型

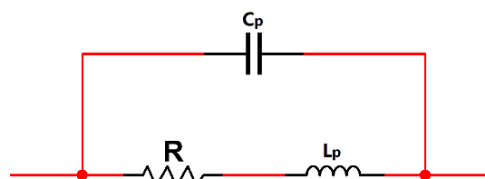


图 2.2.8c 实际电阻简化模型

由图 2.2.8 可以看出：每种实际元件都掺杂着其他两种元件的特性，比如实际电感器包含有寄生电容 C_p (parasitic capacitance) 与内阻 r 。信号频率较高时，寄生电容不能忽视；信号频率较低时，内阻不能忽视。实际电阻器与电容器同样如此。寄生电容和电感有的资料也称作杂散（分布）电容和电感，这三种说法有一点区别，这里不作详细区分。另外图 2.2.8 所示模型也是一种简化模型，实际元件的精确模型比这还要复杂。

我们做实验时的信号频率较低，寄生电容与寄生电感可以忽略，但是精确测量与分析时电感与电容（尤其是电感）元件的内阻不能忽略。考虑元件内阻后，图 2.2.5 理想电路变为图 2.2.9 所示模型。

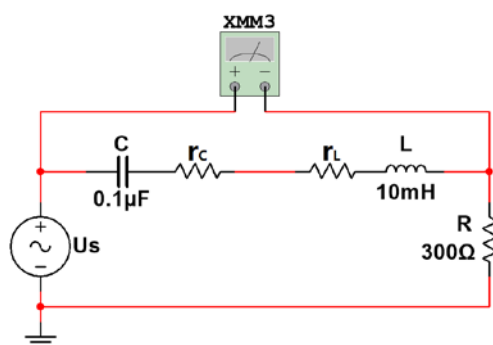


图 2.2.9 考虑元件内阻后电路模型

从图 2.2.9 可以看出，电路的电容具有内阻 r_c ，电感具有内阻 r_L ，这两个内阻是造成绘制的谐振曲线谐振时 $I/I_0 < 1$ 的主要原因，要想修正误差就要知道这两个内阻大小。使用万用表可以粗略测量得到 HA-MB03A 实验板上 10mH 工字电感的内阻 r_L 是 63Ω 左右，但是电容的内阻无法通过万用表测量。那有其他办法吗？

一个简单的办法是在谐振频率下用万用表交流电压（AC）档测量电容与电感两端的电压 U_{CL} （图 2.2.9）。根据 2.2.2.1 节分析可知：发生谐振时电容上的电压 U_C 与电感上的电压 U_L 大小相等，相位相反，因此电容与电感两端的电压 U_{CL} 理论上应该等于 0，但实际测量值却是 $U_{CL}=0.3V$ ，这个 U_{CL} 就是电容内阻 r_c 与电感内阻 r_L 上的电压，**注意：**这个两个电压并不反相，而是同相关系。因为串联电路电流处处相等，所以发生谐振时， $U_{CL}/(r_c+r_L)=U_R/R$ ，将 $U_{CL}=0.3V$ ， $U_R=1.183V$ ， $R=301\Omega$ （实际测量值）代入，计算得到 $r_{CL}=r_c+r_L=76.3\Omega$ 。

根据 2.2.2.2 中关于品质因数的定义，电容与电感内阻（ r_c 与 r_L ）上消耗的功率应该与电阻 R 上消耗的功率一样计入有功功率，所以电容与电感内阻上的电压应该计入电路中电阻电压，也就是应该对表 2.2.1 测量得到的电阻 R 上的电压值 U_R 做修正，修正电压 $U_R'=U_R+U_{CL}$ 。这样，只要测量各个频率下的 U_{CL} ，就能得到相应的电阻上电压 U_R 的修正值 U_R' 。 U_R'/U_s 就是修正后的谐振曲线。

对这种修正方法再做进一步简化：令 $(R+r_{CL})/R=(U_R+U_{CL})/U_R=U_R'/U_R=k$ ，我们把这个比值定义为修正系数 k ，于是 $U_R'=kU_R$ 。现在已知 $r_{CL}=76.3\Omega$ ，所以当 $R=301\Omega$ （标称值 300Ω）时， $k_1=(301\Omega+76.3\Omega)/301\Omega=1.253$ ；当 $R=100\Omega$ 时， $k_2=(100\Omega+76.3\Omega)/100\Omega=1.763$ 。于是就得到了 $R=300\Omega$ （实际是 301Ω）与 $R=100\Omega$ 谐振曲线的修正曲线（图 2.2.10 虚线）。

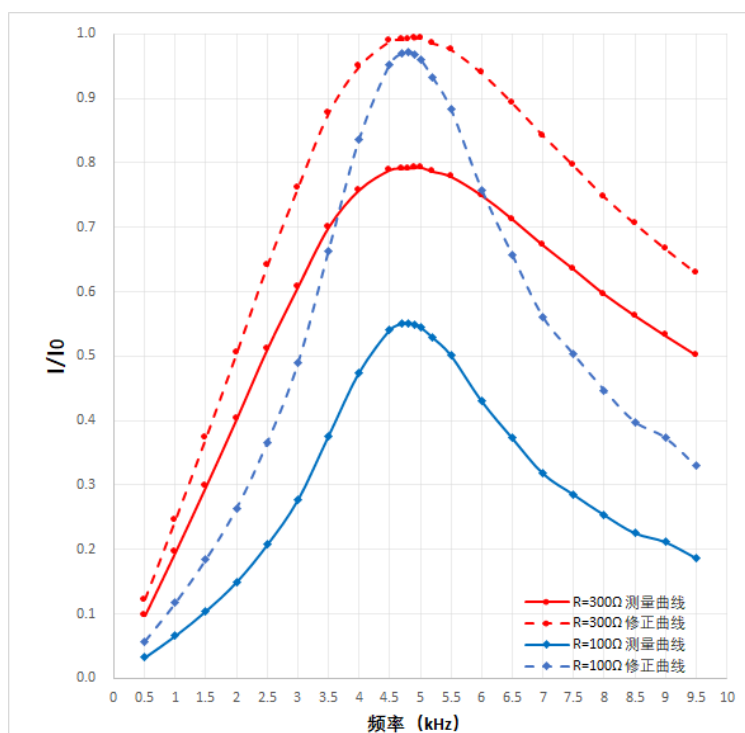


图 2.2.10 谐振曲线与修正曲线

图 2.2.10 中实线就是图 2.2.7 中的实际测量曲线，虚线则是修正后的曲线。从修正曲线上可以看出，信号频率接近谐振频率时， $I/I_0 \approx 1$ 。

还有一个问题，很多教材中都把谐振曲线画为一条基于谐振频率左右对称的曲线，可是我们通过实验实际测量得到的曲线并不太对称。其实只要把图 2.2.7 或图 2.2.10 曲线的横轴（频率轴）采用对数坐标，谐振曲线就会呈现对称关系（图 2.2.11）。

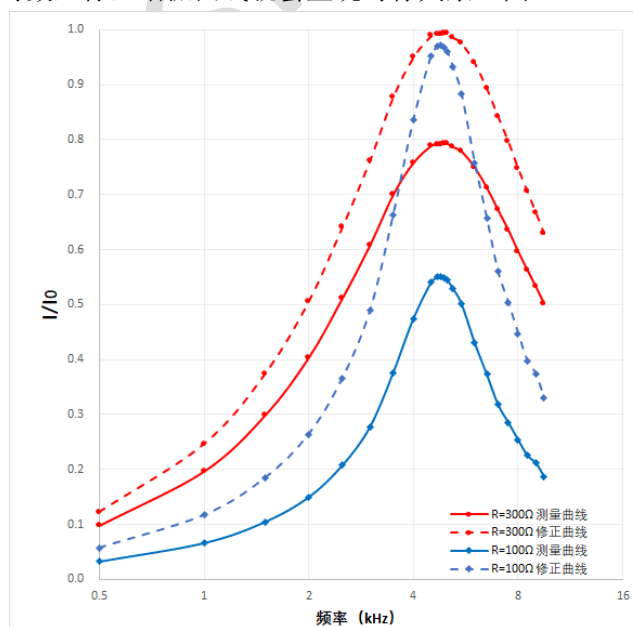


图 2.2.11 谐振曲线与修正曲线（频率轴采用对数坐标）

如果谐振电路的品质因数 Q 比较大 (>10)，即使频率轴采用线性坐标，谐振曲线也会近似呈现左右对称关系。

2.2.4 *Lab2.2-3 电感、电容值及内阻测量

实验目的

- 利用所学知识设计一个能测量电感值、电容值及元件内阻的简单实验；
- 在实验过程中学习提高测量精度的实验技巧；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子……

问题提出

在 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量与绘制实验](#) 中通过实验测量得到了谐振曲线，然后通过计算得到了修正曲线。根据 [公式 2.2.1](#)，谐振频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ，当 $L=10\text{mH}$ ， $C=0.1\mu\text{F}$ 时，计算出 $f_0=5.0\text{kHz}$ 。但是从 [图 2.2.7](#) 中看到，当 $R=100\Omega$ 时， I/I_0 的最大值出现在 4.8kHz 处——这意味着谐振频率 f_0 不是 5.0kHz ，而是 4.8kHz 。若不是测量误差，那就是电容与电感实际值与标称值有一定误差。一般手持万用表可以测量电容，但是测不了电感，并且严格来说电容与电感值都是随频率有少许变化的。我们能不能用前面所学知识，设计一个电路，相对比较准确的测量信号频率 4.8kHz 时的电容容值与电感感值？

另外，[Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制实验](#) 计算谐振曲线修正系数的时候，测量了电容内阻 r_C 与电感内阻 r_L 之和，即： $r_C+r_L=76.3\Omega$ ，但没有得到具体电容与电感的内阻分别是多少。有没有办法测量出电容与电感的内阻的具体数值呢？

在 [Lab2.1-3 电感与电容值简单测量实验](#) 中我们初步测量了电感感值与电容容值，但当时没有考虑电感与电容的内阻，因此得到的结果误差比较大（尤其是电感值），现在对该测量方法进行改进，以便得到更为精确的结果。

实验原理

以测量实际电感感值与内阻为例，测量电路如图 2.2.12a，测量原理如图 2.2.12b 所示。

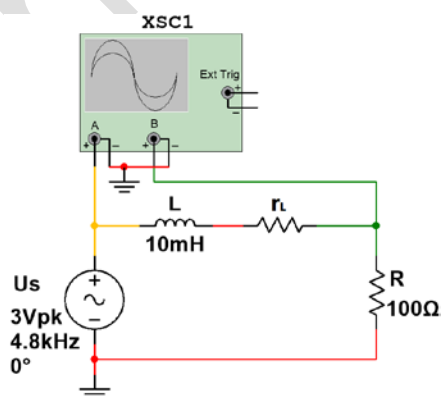


图 2.2.12a 测量电路

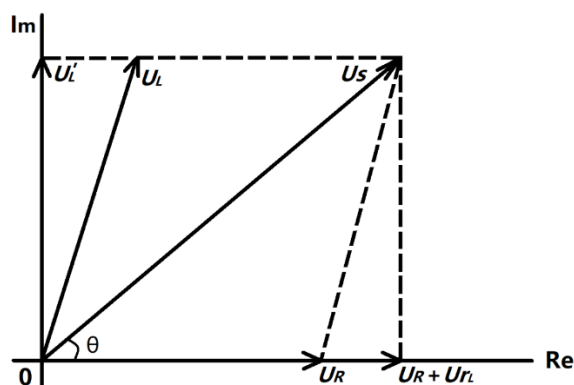


图 2.2.12b 测量原理

示波器的 A 通道测量输入信号 U_s , B 通道测量电阻 R 上电压 U_R , 通过测量示波器 AB 通道的相位差, 就能得到 U_s 与 U_R 的相位角 θ , 于是电感内阻 r_L 上产生的电压:

$$U_{rL} = U_s \cos \theta - U_R \quad (\text{公式 2.2.7})$$

因为 $U_{rL}/r_L = U_R/R$, 所以 $r_L = RU_{rL}/U_R$, 这样就得到了电感的内阻 r_L 。从图 2.2.12b 可知: U_L' 才是真正由感抗 (ωL) 产生电压

$$U_L' = U_s \sin \theta \quad (\text{公式 2.2.8})$$

U_L' 才真正与 U_R 成 90° 正交关系。又因为 $U_L'/\omega L = U_R/R$, 所以 $L = U_L'/U_R * R / 2\pi f$, 这样就得到了电感感值。

电容容值及内阻测量原理与电感感值及内阻测量原理类似, 这里不再赘述。

实验过程

按照图 2.2.12a 在 HA-MB03A 实验板上搭建电路, 其中 r_L 是待测的电感 L 的内阻。将 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器示波器 A 通道接到信号源 AO1 输出端, B 通道接到电阻 R 上, 让信号源 AO1 产生一个 $6V_{p-p}$, 频率 4.8kHz (谐振频率 f_0) 的正弦波作为输入信号 U_s , 能够得到图 2.2.13 所示波形。

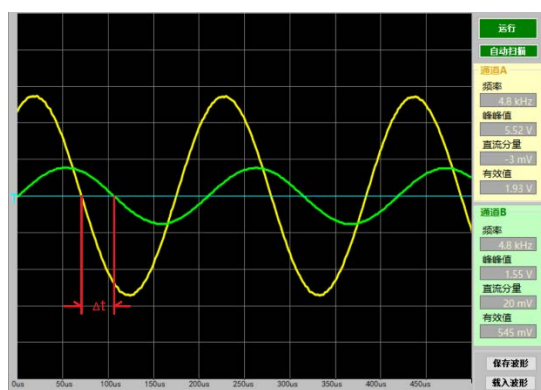


图 2.2.13a 测量波形

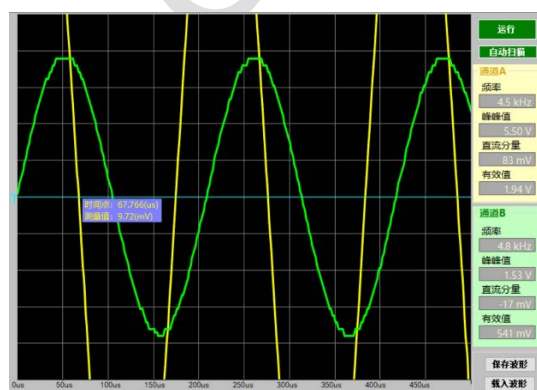


图 2.2.13b 波形放大

图 2.2.13 中黄色的是输入信号 U_s 波形, 绿色的是电阻 R 上信号 U_R 波形。 Δt 就是两个信号的相位差。为了提高 Δt 的测量精度, 可以点击示波器界面右上方红色的“暂停”按键, 然后加大通道增益, 用时间标尺功能仔细测量两个信号在过零点处的时间, t_A 与 t_B (图 2.2.13b), $\Delta t = t_B - t_A$, 为了准确可以多次测量后取平均值。

U_s 与 U_R 的相位角 $\theta = \Delta t * f_0 * 360^\circ = 37.162 \mu s * 4.8 \text{ kHz} * 360^\circ = 64.22^\circ$ 。然后用万用表交流电压 (AC) 档测量输入 U_s 与 U_R 的信号电压值——1.585V 与 0.433V。

需要说明的是: 因为万用表带宽限制, 这里测量得到的电压值并不是信号的实际有效值, 它是有衰减的。因为在同一频率下, 衰减程度是同样的, 而后续计算中用到的都是 U_s 与 U_R 的信号比值, 因此并不会造成后续计算的误差。如果想得到信号真实的幅值, 可以读取示波器 AB 通道幅值信息, 但精度低于万用表。

因此, $U_s = 1.585 \angle 64.22^\circ$, $U_R = 0.433 \angle 0^\circ$ 。根据公式 2.2.7: $U_{rL} = U_s \cos \theta - U_R = 1.585 \cos 64.22^\circ - 0.433 = 0.2563$; 根据公式 2.2.8: $U_L' = U_s \sin \theta = 1.585 \sin 64.22^\circ = 1.427$; 所以电感 L 上的信号 $U_L = 0.2563 + j1.427 = 1.45 \angle 79.82^\circ$ ——可见, 由于内阻 r_L 的存在, 信号 U_L 不再与信号 U_R 成理论上的 90° 正交关系, 而是成 79.82° 夹角关系。

因为 $U_{rL}/U_R=r_L/R$ ，所以 $r_L=U_{rL}/U_R \cdot R=0.2563/0.433 \cdot 100=59.19\Omega$ ，这样就得到了 HA-MB03A 实验板上标称值 10mH 工字电感的内阻 $r_L=59.19\Omega$ 。因为 $U_L'/U_R=\omega_0 L/R$ ，所以 $L=U_L'/U_R \cdot R/2\pi f_0=1.427/0.433 \cdot 100/(2\pi \cdot 4800)=10.93\text{mH}$ ，这样就得到了标称值为 10mH 的电感在 4.8kHz 频率下的实际感值 $L=10.93\text{mH}$ 。

将图 2.2.12a 电路中的电感换成电容，用同样的办法，可以得到 $U_C=0.0904-j1.515=1.518\angle-86.59^\circ$ 。HA-MB03A 实验板上 0.1μF 贴片电容的内阻 $r_C=19.46\Omega$ ，在 4.8kHz 频率下实际容值 $C=0.102\mu\text{F}$ （过程略）。

实验分析

将上面测量计算得到电容内阻 $r_C=19.46\Omega$ 与电感内阻 $r_L=59.19\Omega$ 相加， $r_C+r_L=78.7\Omega$ ，这与 [Lab2.2-2 串联谐振曲线绘制实验](#) 中测量得到的 $r_{CL}=r_C+r_L=76.3\Omega$ 比较接近，误差 3% 左右。

将上面得到电容容值 $C=0.102\mu\text{F}$ 与电感性值 $L=10.93\text{mH}$ 代入 [公式 2.2.1](#)，谐振频率 $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ，计算得 $f_0=4.78\text{kHz}$ ——这很好的解释了 [图 2.2.7](#) $R=100\Omega$ 时谐振曲线的谐振频率出现在 4.8kHz 处而非按照电感与电容标称值计算得到 5.0kHz 处。

将图 [2.2.12b](#) 中各个相量除以图 2.2.12a 电路中的电流 I ，就能得到下面的阻抗相量图（图 2.2.14）。

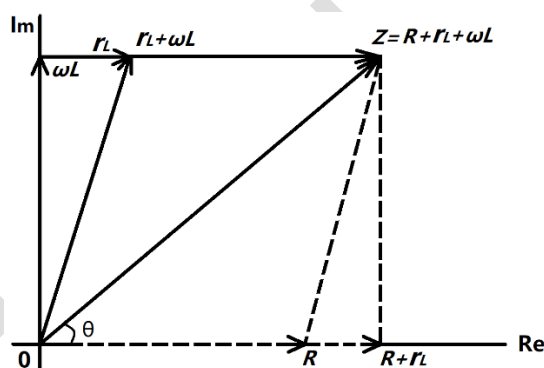


图 2.2.14 电阻电感串联电路实际阻抗相量图

从相量的角度分析：电感的感抗 ωL 与内阻 r_L 成正交关系，构成电感的实际阻抗（考虑电感的内阻） $Z_L=r_L+j\omega L$ ；电感的阻抗 Z_L 又与电阻 R 构成电路总的阻抗 $Z=R+Z_L=(R+r_L)+j\omega L$ 。

2.2.5 *Lab2.2-4 串联谐振电路电感、电容上的电压曲线测量绘制

实验目的

- 进一步研究分析串联谐振电路的细节；
- 了解掌握串联谐振电路电感与电容上电压-频率曲线与谐振曲线之间的关系；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子……

问题提出

通过前面的分析与实验我们知道：RLC 串联谐振电路发生谐振时 ($f=f_0$)，电路中的阻抗最小 ($Z_0=R$)，电流最大 ($I_0=U_s/R$)；那谐振时电感上的电压 U_{L0} 与电容上的电压 U_{C0} 又是多大呢？它们是电感与电容上出现的最大电压吗？

实验原理

首先分析串联谐振电路理想元件（忽略电感与电容内阻）上电压。电感上的电压：

$$U_L = U_s / Z * j\omega L \quad (\text{公式 2.2.9})$$

谐振时， $Z_0=R$ ， $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，代入公式 2.2.9 得： $U_{L0}=U_s/R*j\omega_0 L=jU_s\frac{\sqrt{L/C}}{R}$ ；再将 [公式 2.2.5](#)：

$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ 代入，得： $U_{L0}=jQU_s$ ；同样也可以得到 $U_{C0}=-jQU_s$ （过程略），所以：

$$U_{L0}=jQU_s, U_{C0}=-jQU_s, U_{L0}=U_{C0}=QU_s \quad (\text{公式 2.2.10})$$

由此可见，发生谐振时，电感中存储的磁场能与电容中的电场能相互转换，造成电感与电容上的电压会超过输入信号 U_s 的幅值，尤其当品质因数 Q 比较高的时候 U_{L0} 与 U_{C0} 将变得很大，这有可能会造成电路元件损坏，需要特别注意。

发生谐振时，根据公式 2.2.10： $U_{L0}=U_{C0}=QU_s$ ，这会是电感与电容上出现的最大电压值吗？换句话说就是串联电路发生谐振时电感与电容上的电压会是最大值吗？还有没有可能在别的频率下出现更大的值？

我们先进行理论分析计算，然后仿照绘制谐振曲线 ($I/I_0 \sim f$) 的方法通过实验测量绘制归一化的电感电压-频率曲线 ($U_L/U_{L0} \sim f$) ——以下简称：电感电压曲线；以及归一化电容电压-频率曲线 ($U_C/U_{C0} \sim f$) ——以下简称：电容电压曲线，看看结果如何。

理论计算

根据公式 2.2.9 可知： $U_L = U_s / Z * \omega L = \frac{U_s \omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ ，根据公式 2.2.10 可得：

$$U_L/U_{L0} = \frac{\omega L}{Q \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (\text{公式 2.2.11})$$

根据前面的分析可知，谐振曲线（ $I/I_0 \sim f$ ）是一条在谐振频率 f_0 出现峰值的单峰曲线，我们猜想电感电压曲线 $U_L/U_{L0} \sim f$ 有可能与谐振曲线有相似的形态，只不过过了峰值频率后，因为感抗不断增加，电感上电压下降比较慢，因此 U_L/U_{L0} 曲线下降速度应该比谐振曲线慢，具体形态一会儿通过实验测量绘制后就能看到。我们最关心的有以下两点：

- U_L/U_{L0} 曲线峰值是不是等于 1，也就是电感上出现的最大电压值（记为 U_{LM} ）是否就是 U_{L0} ？
- 如果 $U_{LM} > U_{L0}$ ，那么电感上出现的最大电压值 U_{LM} 时对应的信号频率（记为 f_L ）是大于 f_0 ，还是小于 f_0 ？

为了回答以上两个问题，可以将公式 2.2.11 对频率 ω 求导，令 $dU_L(\omega)/d\omega=0$ ，于是可以解出 $\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$ ，即： $f_L = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

(公式 2.2.12)

$$\text{以及: } U_{LM} = \frac{U_{L0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (\text{公式 2.2.13})$$

以上推导过程省略，有兴趣的读者可以阅读[附录 A：参考资料\[3\]](#)。从公式 2.2.12、公式 2.2.13 可以明显看出 $f_L \neq f_0$ ，也就是电感电压曲线（ $U_L/U_{L0} \sim f$ ）的峰值并不是出现的谐振频率 f_0 处；同时电路发生谐振时电感上的电压 U_{L0} 也不是电感上出现的最大电压 U_{LM} 。对于电容上电压与频率关系可以用同样的方法进行分析。

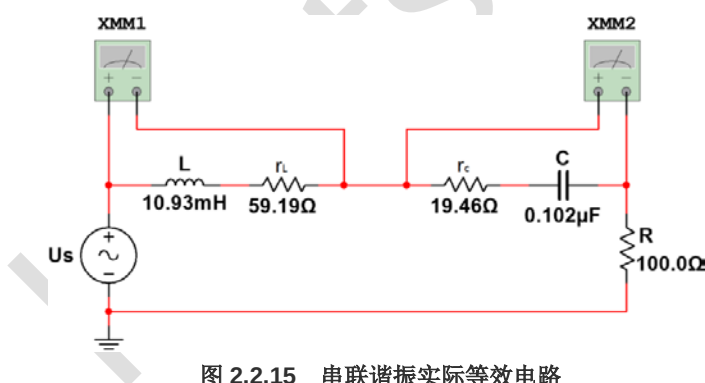


图 2.2.15 串联谐振实际等效电路

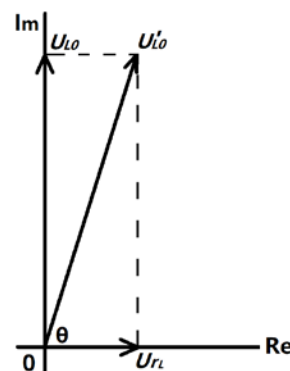


图 2.2.16 谐振时电感电压相量图

我们利用图 2.2.15 电路测量电感电压曲线（ $U_L/U_{L0} \sim f$ ）与电容电压曲线（ $U_C/U_{C0} \sim f$ ），电路中各个元件参数取前面实验的实际测量值，测量过程参考[Lab2.2-3 电感、电容值及内阻精确测量实验](#)。接下来测量计算图 2.2.15 电路中电感上的电压 U_L 与电容上的电压 U_C ，这两个值是剔除元件内阻影响的修正值。

首先计算电路的品质因数（要把电感的内阻 r_L 与电容的内阻 r_C 都考虑进去），这样电路总的阻性阻抗 $R' = R + r_L + r_C = 100.0\Omega + 59.19\Omega + 19.46\Omega = 178.65\Omega$ 。将根据[公式 2.2.5](#)： $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R'}$ ，计算得电路的品质因数： $Q = 1.832$ ，这个品质因数对应的就是[图 2.2.10](#)中蓝色虚线代

表的修正谐振曲线。再将 $Q=1.832$ 、 $f_0=4.8\text{kHz}$ 代入公式 2.2.12，计算得： $f_L=5.2\text{kHz}$ ；将 $Q=1.832$ 代入公式 2.2.13，计算得： $U_{LM}=1.04U_{L0}$ 。

可见，电感电压的最大值 U_{LM} 对应的频率 f_L 并不是谐振频率 f_0 ，而是高于谐振频率，此频率下电感电压最大值 U_{LM} 也略大于谐振时电感电压 U_{L0} 。

按照上面的方法，同样可以推导出电容上电压最大值 U_{CM} 以及最大值对应的频率 f_C 并不是发生谐振时电容电压 U_{C0} 以及谐振频率 f_0 ，而是 $f_C=f_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ (公式 2.2.14)

以及 $U_{CM}=\frac{U_{C0}}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ (公式 2.2.15)

根据公式 2.2.14，公式 2.2.15 可以计算出： $f_C=4.4\text{kHz}$ ， $U_{CM}=1.04U_{C0}$ ，且 $U_{CM}=U_{LM}$ 。

实验过程

图 2.2.15 电路发生谐振时，我们用万用表测量电感两端的电压得到的并不是 U_{L0} ，而是 U_{L0}' （图 2.2.16）。所以即使我们考虑到电路元件的内阻，取实际电路的品质因数 $Q=1.832$ 代入公式 2.2.10： $U_{L0}=QU_S$ 计算得到电压值与测量得到的电压 U_{L0}' 也是不同的，想要通过计算得到 U_{L0}' 还要对公式 2.2.10 做一定修正。

根据图 2.2.16，电感 L 因为有内阻 r_L 的存在，所以谐振时电感上电压测量值 $U_{L0}'=\sqrt{U_{L0}^2+U_{rL}^2}$ 。又因为 $U_{rL}/r_L=U_S/R'$ （其中 $R'=R+r_L+r_C$ ），所以 $U_{rL}=U_S*r_L/R'$ ；将该式与 $U_{L0}=QU_S$ 一同代入 $U_{L0}'=\sqrt{U_{L0}^2+U_{rL}^2}$ ，化简后得：

$$U_{L0}'=U_S\sqrt{Q^2+\left(\frac{r_L}{R'}\right)^2}, \text{ 令 } Q_L=\sqrt{Q^2+\left(\frac{r_L}{R'}\right)^2}, \text{ 则 } U_{L0}'=Q_L U_S \quad (\text{公式 2.2.16})$$

将 $Q=1.832$ ， $r_L=59.19\Omega$ ， $R'=178.65\Omega$ 代入，得： $Q_L=1.862$ 。

$$\text{对于电路中的电容同样分析可以得到: } U_{C0}'=U_S\sqrt{Q^2+\left(\frac{r_C}{R'}\right)^2}=Q_C U_S \quad (\text{公式 2.2.17})$$

将 $Q=1.832$ ， $r_C=19.46\Omega$ ， $R'=178.65\Omega$ 代入，得： $Q_C=1.835$ （过程略）。

接下来在 HA-MB03A 实验板上根据图 2.2.15 搭建电路，然后对实际电路测量验证以上分析与计算是否正确，测量时只要仿照 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量与绘制实验](#) 在不同频率下用万用表交流电压（AC）档测量输入信号 U_S 与电感上电压 U_L 以及电容上电压 U_C ，然后与频率值 f 一一对应记录在 Excel 表格中（表 2.2.2）。

根据公式 2.2.16： $U_{L0}'=Q_L U_S$ ，所以 $U_L/U_{L0}'=U_L/(Q_L U_S)$ ；根据公式 2.2.17： $U_{C0}'=Q_C U_S$ ， $U_C/U_{C0}'=U_C/(Q_C U_S)$ 。这样用不同频率下测得的电感电压 U_L 除以系数 Q_L （1.8613）或是电容电压 U_C 除以系数 Q_C （1.8352）及对应的输入信号电压 U_S ，就能得到该频率下的 U_L/U_{L0}' 与 U_C/U_{C0}' 值，将这些值连起来就能得到电感电压曲线与电容电压曲线（图 2.2.17）。

频率 (kHz)	R=100Ω				电感电压		电容电压	
	Us (V)	UR (V)	UR/Us (I/I0)	I/I0 修正值	UL (V)	UL/UL0'	UC (V)	UC/UC0'
0.5	2.089	0.068	0.033	0.058	0.049	0.013	2.106	0.549
1	2.063	0.137	0.066	0.119	0.125	0.033	2.137	0.564
1.5	2.021	0.212	0.105	0.187	0.247	0.066	2.191	0.591
2	1.962	0.294	0.150	0.268	0.428	0.117	2.276	0.632
2.5	1.877	0.39	0.208	0.371	0.693	0.198	2.395	0.695
3	1.774	0.492	0.277	0.496	1.028	0.311	2.527	0.776
3.5	1.626	0.612	0.376	0.673	1.502	0.496	2.659	0.891
4	1.479	0.702	0.475	0.848	1.956	0.711	2.681	0.988
4.5	1.369	0.74	0.541	0.966	2.324	0.912	2.544	1.013
4.8	1.331	0.734	0.551	0.985	2.431	0.981	2.385	0.976
5	1.318	0.718	0.545	0.973	2.47	1.007	2.243	0.927
5.2	1.311	0.693	0.529	0.945	2.493	1.022	2.077	0.863
5.5	1.312	0.657	0.501	0.895	2.475	1.014	1.89	0.785
6	1.318	0.567	0.430	0.769	2.363	0.963	1.49	0.616
6.5	1.314	0.49	0.373	0.666	2.21	0.904	1.199	0.497
7	1.295	0.412	0.318	0.569	2.048	0.850	0.931	0.392
7.5	1.272	0.363	0.285	0.510	1.909	0.806	0.774	0.332
8	1.241	0.315	0.254	0.454	1.774	0.768	0.633	0.278
8.5	1.2	0.271	0.226	0.404	1.665	0.745	0.51	0.232
9	1.176	0.249	0.212	0.378	1.563	0.714	0.454	0.210
9.5	1.123	0.21	0.187	0.334	1.469	0.703	0.354	0.172

表 2.2.2 测量数据

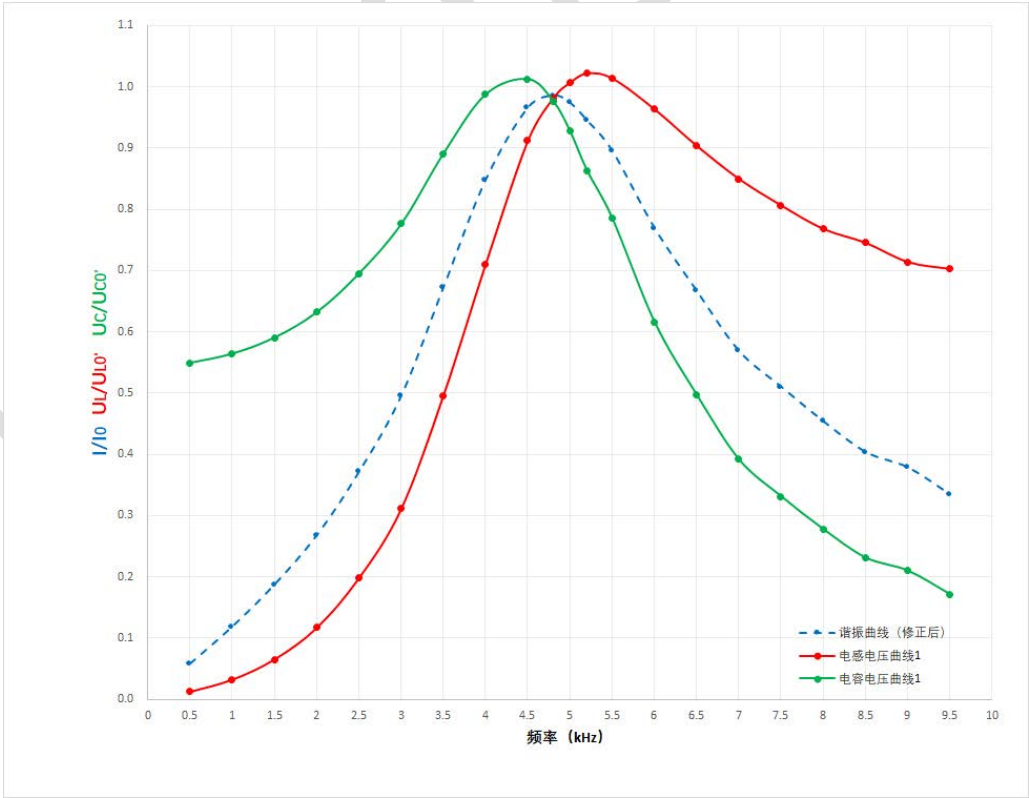


图 2.2.17 电感电压曲线（红色）与电容电压曲线（绿色）

图 2.2.17 中蓝色虚线就是图 2.2.10 中的串联谐振修正曲线，红色实线是电感电压频率曲线，绿色实线是电容电压频率曲线。我们可以看出电感上电压最大值 U_{LM} 与电容上电压最大值 U_{CM} 并不是出现在谐振频率 f_0 (4.8kHz) 处，而是分别出现在 5.2kHz 与 4.4kHz，这与我们上面理论计算得到的 $f_L=5.2\text{kHz}$ ， $f_C=4.4\text{kHz}$ 一致。

表 2.2.2 中 $f_L=5.2\text{kHz}$ 时的 U_L/U_{L0} 比值 1.022 就是归一化的 U_{LM} ， $f_0=4.8\text{kHz}$ 时的 U_L/U_{L0} 比值理论上应该是 1，由于测量误差，实际比值是 0.981，这两个比值相除等于 1.04；表 2.2.2 中 $f=4.5\text{kHz}$ 时的 U_C/U_{C0} 比值 1.013 (这个值近似认为是 $f_C=4.4\text{kHz}$ 时的比值) 除以 $f_0=4.8\text{kHz}$ 时的 U_C/U_{C0} 比值 0.976，同样等于 1.04。这与前面根据公式 2.2.13 与 2.2.15 理论计算出来的 $U_{LM}(U_{CM})=1.04U_{L0}(U_{C0})$ 结果一致。

结合之前的分析，仔细研究图 2.2.17 曲线还能发现以下两点：

- 根据公式 2.2.12 与公式 2.2.14 可知： $f_0=\sqrt{f_L f_C}$ ，即：谐振频率 f_0 是电感电压最大值对应频率 f_L 与电容电压最大值对应频率 f_C 的几何平均值（几何中心）；
- 当 Q 值较大 (>10) 时，可以近似认为 $f_L \approx f_C \approx f_0$ ， $U_{LM}(U_{CM}) \approx U_{L0}(U_{C0}) = QU_S$ ；这也是为什么很多教材不提及串联谐振电路电感电压曲线与电容电压曲线，认为这两条曲线与谐振曲线是重合的原因；

从公式 2.2.12 与公式 2.2.14 可知：当 $Q < 1/\sqrt{2}$ 时， f_L 与 f_C 没有实数解，此时电感与电容上电压曲线不会呈现单峰形态，没有极值。有兴趣的读者可以用 Multisim 仿真一下看看曲线的形态。

实验简化

根据公式 2.2.9 与公式 2.2.10 可知： $U_L/U_{L0} = \frac{\omega L}{QZ}$ ，根据公式 2.2.3： $I/I_0 = R/Z$ ，所以

$$\frac{U_L/U_{L0}}{I/I_0} = \frac{\omega L}{QR} \quad (\text{公式 2.2.18})$$

再将公式 2.2.5： $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ 代入后化简得： $\frac{U_L/U_{L0}}{I/I_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$ ，即： $U_L/U_{L0} = f/f_0 * (I/I_0)$ 。由此可见：

测量得到谐振曲线 $I/I_0 \sim f$ 后，只要乘上因子 f/f_0 就能得到电感电压曲线 $U_L/U_{L0} \sim f$ ；同样，谐振曲线 $I/I_0 \sim f$ 只要乘上因子 f_0/f 就能得到电容电压曲线 $U_C/U_{C0} \sim f$ ，即： $U_C/U_{C0} = f_0/f * (I/I_0)$ （推导过程略）。

因此只需将表 2.2.1 中的谐振曲线 I/I_0 数据 (U_R/U_S) 乘以相应的因子 f/f_0 或 f_0/f 就能得到当前频率下归一化的电感电压值 U_L/U_{L0} 或是电容电压值 U_C/U_{C0} (表 2.2.3)。这样不需要实际测量电感上的电压 U_L 与电容上的电压 U_C ，也能得到电感电压曲线与电容电压曲线 (图 2.2.18)。

频率 (kHz)	R=100Ω				电感电压	电容电压
	Us (V)	UR (V)	UR/Us (I/I ₀)	I/I ₀ 修正值	I/I ₀ *f/f ₀	I/I ₀ *f ₀ /f
0.5	2.089	0.068	0.033	0.058	0.006	0.558
1	2.063	0.137	0.066	0.119	0.025	0.570
1.5	2.021	0.212	0.105	0.187	0.059	0.600
2	1.962	0.294	0.150	0.268	0.112	0.643
2.5	1.877	0.39	0.208	0.371	0.193	0.713
3	1.774	0.492	0.277	0.496	0.310	0.793
3.5	1.626	0.612	0.376	0.673	0.490	0.922
4	1.479	0.702	0.475	0.848	0.707	1.018
4.5	1.369	0.74	0.541	0.966	0.906	1.030
4.8	1.331	0.734	0.551	0.985	0.985	0.985
5	1.318	0.718	0.545	0.973	1.014	0.935
5.2	1.311	0.693	0.529	0.945	1.023	0.872
5.5	1.312	0.657	0.501	0.895	1.025	0.781
6	1.318	0.567	0.430	0.769	0.961	0.615
6.5	1.314	0.49	0.373	0.666	0.902	0.492
7	1.295	0.412	0.318	0.569	0.829	0.390
7.5	1.272	0.363	0.285	0.510	0.797	0.326
8	1.241	0.315	0.254	0.454	0.756	0.272
8.5	1.2	0.271	0.226	0.404	0.715	0.228
9	1.176	0.249	0.212	0.378	0.709	0.202
9.5	1.123	0.21	0.187	0.334	0.661	0.169

表 2.2.3 计算数据

其中谐振曲线 I/I_0 数据要选用修正值，谐振频率取 $f_0=4.8\text{kHz}$ ，然后看看根据表 2.2.3 数据绘制的电感电压曲线与电容电压曲线与图 2.2.17 中的曲线是否重合（图 2.2.18）。

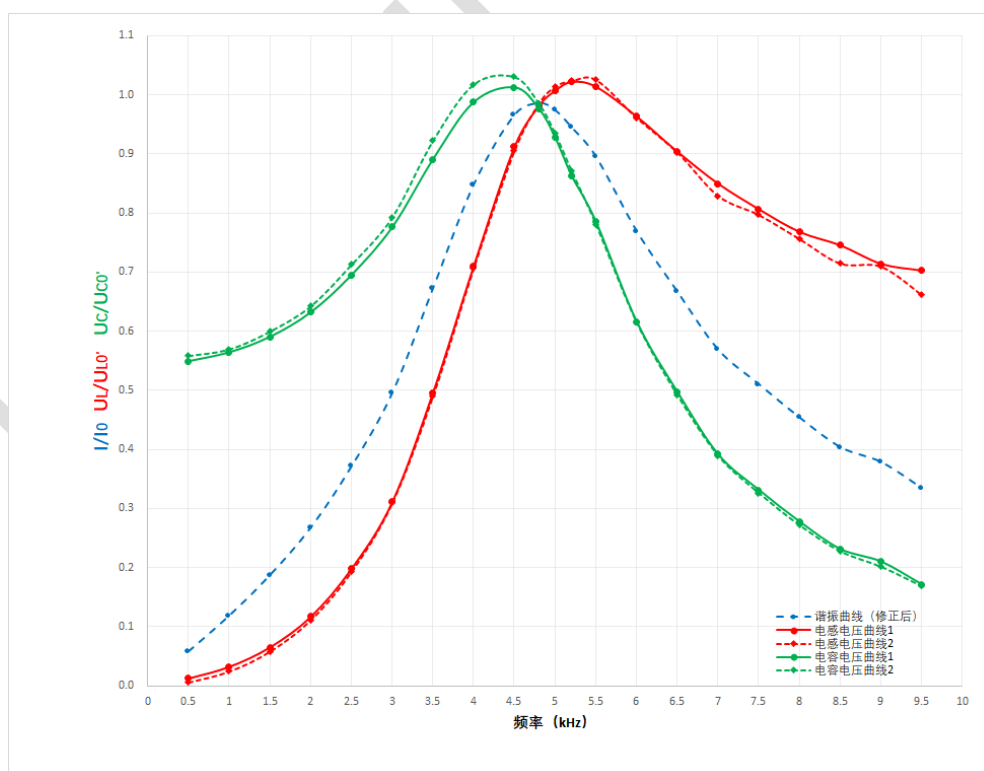


图 2.2.18 电感电压曲线（红色）与电容电压曲线（绿色）

可以看到，图 2.2.18 中红色与绿色的虚线分别是用第 2 种简化方法得到的电感与电容电压曲线，它与之前实际测量电感电压 U_L 与电容电压 U_C 方法得到曲线（红色、绿色实线）大体重合。

第 2 种简化方法（虚线）与第 1 种实际测量电感与电容电压（实线）得到曲线理论上应该完全重合，现在不完全重合的原因主要是元件内阻造成的，电容电压曲线（绿色实线与虚线）的重合度低于电感电压曲线（红色实线与虚线）说明电容内阻测量误差大于电感内阻测量误差。第 2 种简化方法虽然简单，但是得到的曲线精度也低于第 1 种实际测量电感与电容电压得到的曲线。

第 2 种方法在得到串联谐振曲线后，无需实际测量电感与电容电压，只需乘上因子 f/f_0 或 f_0/f 就能得到电感电容电压~频率曲线，说明谐振电路的很多参数与特性都是相互关联的，知道其中一个，其他的就可以推导出来；改变其中一个，其他的参数与特性也就随着变化。

有的教材把**串联谐振称作电压谐振**，意思是在谐振频率下电路中的电阻、电感、电容上的电压都达到最大值——称之为进入谐振状态。通过上面的分析与实验，我们知道这句话是有条件的，即：电路的品质因数 Q 不能太小，否则电阻、电感、电容上的电压出现最大值的频率并不完全重合。

2.2.6 串联谐振电路的通频带

从之前的分析与实验可以看到谐振曲线 ($I/I_0 \sim f$) 实际就是一个带通滤波器曲线——在谐振频率 f_0 附近是通带，通带两侧是阻带。我们把半功率点 ($P/2$) 定义为通带与阻带的边界，这个边界频率称为截止频率。带通滤波器有两个截止频率，分别称为下截止频率 (ω_L 或 ω_L) 与上截止频率 (ω_H 或 ω_H)。

根据 [公式 2.2.4](#): $I/I_0 = R/Z = \frac{R}{R+j(\omega L - 1/\omega C)} = \frac{1}{1+j\frac{1}{R}(\omega L - 1/\omega C)}$ ，将 [公式 2.2.5](#): $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ 代入得：

$I/I_0 = \frac{1}{1+jQ\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}$ ，再将 [公式 2.2.1](#): $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 代入，得：

$$I/I_0 = R/Z = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad (\text{公式 2.2.19})$$

公式 2.2.19 是串联谐振曲线的另一种相量表达式，与 [公式 2.2.4](#) 等价。公式 2.2.19 的模：

$$I/I_0 = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (\text{公式 2.2.20})$$

公式 2.2.20 是串联谐振曲线的幅频曲线表达式，也就是前面实验测量得到的曲线。

因为功率 $P \propto I^2$ ，所以半功率点 ($P/2$) 对应于 $I/I_0 = 1/\sqrt{2} = 0.707 (-3\text{dB})$ ，因此根据公式 2.2.20 得： $1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$ 。我们对该式化简求解可以得到：

$$\text{下截止频率 } \omega_L = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} - \frac{1}{2Q} \right), \text{ 上截止频率 } \omega_H = \omega_0 \left(\sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} + \frac{1}{2Q} \right) \quad (\text{公式 2.2.21})$$

$$\text{根据公式 2.2.1, 可以计算出: } \omega_0 = \sqrt{\omega_L \omega_H}, f_0 = \sqrt{f_L f_H} \quad (\text{公式 2.2.22})$$

即：谐振频率是上下截止频率的比例中项（几何中心）。

我们把上下截止频率之差定义为带通滤波器的通频带，根据公式 2.2.21，可以计算出：
 $BW_\omega = \omega_H - \omega_L = \omega_0/Q$, $BW_f = f_H - f_L = f_0/Q$ (公式 2.2.23)

可见，电路的品质因数 Q 越高，通频带越窄；品质因数 Q 越低，通频带越宽。

我们对 [图 2.2.10](#) 所示谐振曲线进行标示，验证一下上面的分析是否正确（图 2.2.19）。

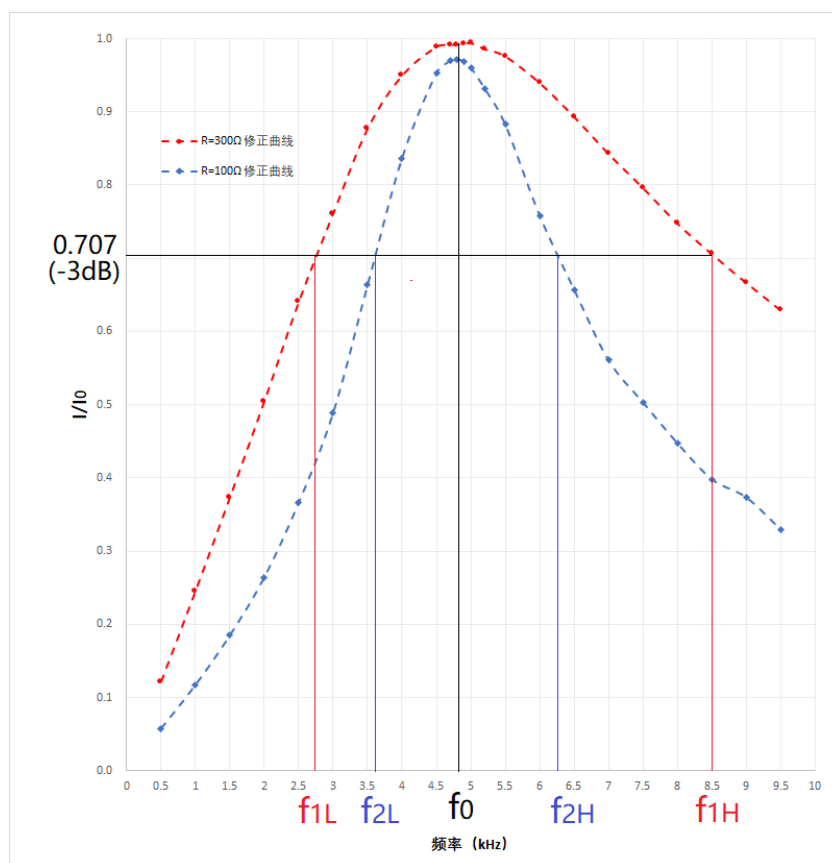


图 2.2.19 串联谐振电路的通频带

图 2.2.19 中红色的是 $R=300\Omega$ 时修正后的谐振曲线，蓝色的是 $R=100\Omega$ 时修正后的谐振曲线。根据 [Lab2.2-3 电感、电容值及内阻精确测量实验](#) 中测量得到的电路中各个元件的实际值及内阻（图 2.2.20），可以计算出 $R=300\Omega$ （实际值 301Ω ）时的品质因数

$$Q_1 = \frac{\sqrt{L/C}}{R+r_L+r_C} = 0.8622, \quad R=100\Omega \text{ 时的品质因数 } Q_2 = 1.832。$$

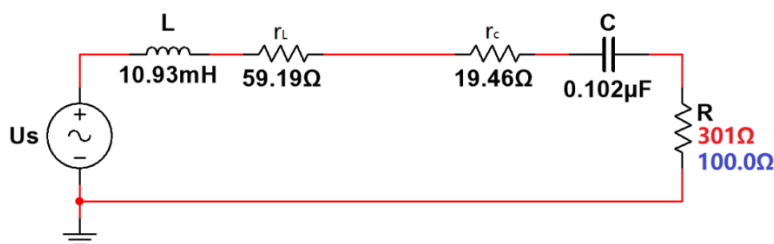


图 2.2.20 电路中各元件实际参数

谐振频率 $f_0=4.8\text{kHz}$ ，根据公式 2.2.22: $BW_f=f_0/Q$ 可以计算出 $R=300\Omega$ 时的通频带 $BW_1=f_0/Q_1=5.6\text{kHz}$ ， $R=100\Omega$ 时的通频带 $BW_2=f_0/Q_2=2.6\text{kHz}$ 。这与根据图 2.2.19 到的 $BW_1=f_{1H}-f_{1L}=8.5-2.8=5.7\text{kHz}$ ， $BW_2=f_{2H}-f_{2L}=6.3-3.6=2.7\text{kHz}$ 基本一致。

2.2.6 *Lab2.2-5 串联谐振电路各元件电压频率响应

实验目的

- 进一步研究分析串联谐振电路的特性；
- 对前面所学知识实验加以归纳总结；

实验器材

- Multisim 电路仿真软件

实验介绍

从系统的角度来看，研究串联谐振电路的种种特性实际主要就是分析电路各元件上电压信号的频率响应，比如：根据[公式 2.2.19](#)，串联谐振曲线的本质是电阻阻抗与电路总阻抗之比随频率变化的关系，但研究时是通过分析电阻上电压信号 U_R 的频率响应来完成的。这个实验我们通过 Multisim 软件中的波特图仪分析电路中各元件电压信号的频率响应。

实验过程

- 电路中电阻上电压 U_R 的频率响应

电阻上的电压 U_R 的频率响应就是[图 2.2.3](#)所示的谐振曲线，之前已经有分析及实验了，这里不再赘述。

- 电路中电感电压 U_L 、电容电压 U_C 的频率响应

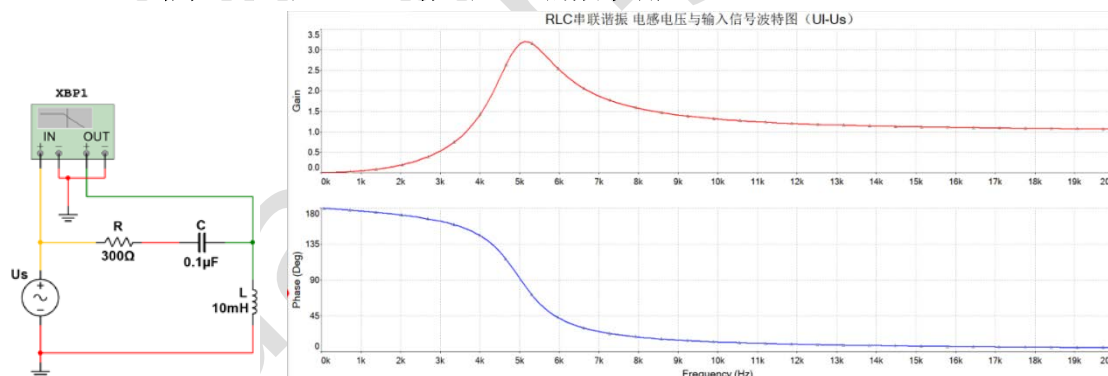


图 2.2.21 U_L 与 U_s 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

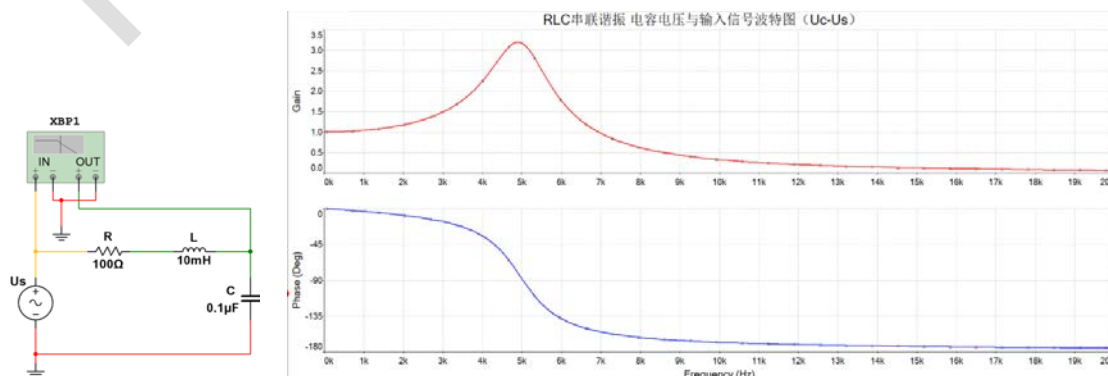


图 2.2.22 U_C 与 U_s 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

图 2.2.21 与图 2.2.22 中的幅频曲线（红色）正是 [Lab2.2-4 电感电压与电容电压测量与绘制实验](#) 中得到的图 2.2.17 所示的曲线。如果仔细看，可以看到电感上幅频响应最大时增益（Gain）大于 1，对应的频率高于谐振频率 f_0 ；电容上幅频响应最大时增益（Gain）同样大于 1，对应的频率低于谐振频率 f_0 。这与实验中得到的曲线相一致，至于增益数值上与实际实验不同是因为仿真电路中的元件是理想的，没有内阻。

● 电路中电抗元件电压 U_{LC} 的频率响应

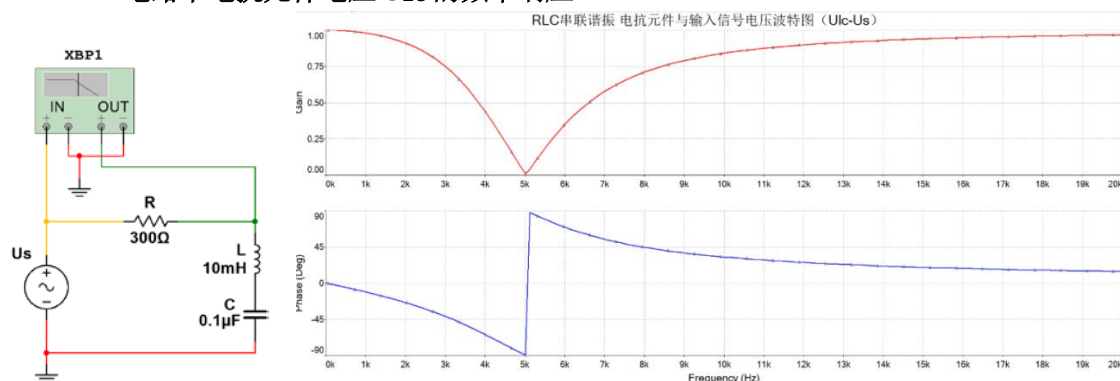


图 2.2.23 U_{LC} 与 U_s 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

图 2.2.23 是电路中电抗元件（电感、电容）总的频率响应。电路中总电抗 $X = \omega L - 1/\omega C$ ，它们的频率特性如图 2.2.24 所示。

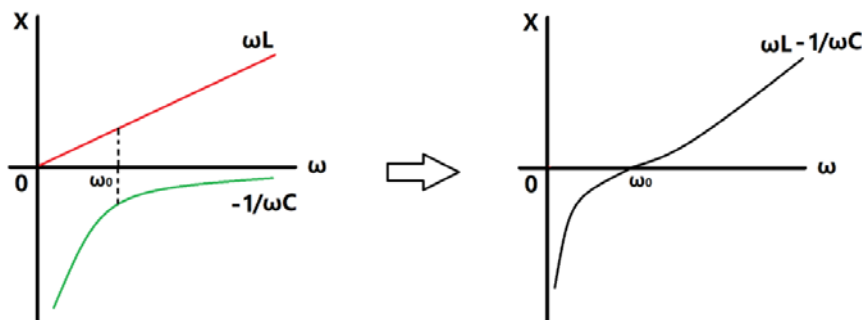


图 2.2.24 串联谐振电路中电抗元件频率特性

图 2.2.24 左红线是感抗频率曲线，绿线是容抗频率曲线，二者之和就是电抗元件频率曲线（图右黑线）。

- 当 $\omega < \omega_0$ 时，容抗大于感抗（ $\omega L < 1/\omega C$ ），电路呈容性；
- 当 $\omega > \omega_0$ 时，感抗大于容抗（ $\omega L > 1/\omega C$ ），电路呈感性；
- 当 $\omega = \omega_0$ 时，感抗等于容抗（ $\omega L = 1/\omega C$ ），电路呈阻性，发生谐振；

2.3 RLC 并联谐振电路

上一节讲了串联谐振电路，这一节对并联谐振电路分析研究。如同阻抗与导纳互为对偶关系一样，串联谐振与并联谐振在很多方面也成对偶关系，这一节的分析与实验也会参照上一节相关内容对比进行。如果对上一节串联谐振电路特性有了全面深刻的了解掌握，接下来对并联谐振的分析与实验测量会轻松许多。

2.3.1 RLC 并联谐振电路基本特性

- 谐振频率与品质因数

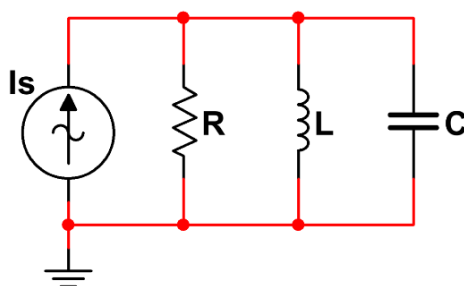


图 2.3.1 RLC 并联谐振电路

图 2.3.1 是 RLC 并联谐振电路，并联谐振电路标准模型中使用的理想电流源 (I_s)。根据 2.1.2 节与 2.1.5 节的内容可以知道，对并联电路使用导纳分析要比使用阻抗简洁得多，因此我们对图 2.3.1 电路使用导纳进行分析。电路中电阻 R 的电导 $G=1/R$ ，感纳 $B_L=-1/\omega L$ ，容纳 $B_C=\omega C$ 。所以电路的总导纳 $Y=G+jB=1/R+j(\omega C-1/\omega L)=|Y|\angle\varphi_Y$ 。当 $\omega C=1/\omega L$ ，也就是容纳与感纳的绝对值相等时，因为容纳与感纳互为正负，所以电路的电纳 $B=0$ ，此时电路中的导纳 Y 最小。因为阻抗 $Z=1/Y$ ，所以此时电路的阻抗最大，并且呈现纯阻性，即： $Z_0=R$ 。这一特性与串联谐振成对偶关系：虽然数值都是 $Z_0=R$ ，但串联电路谐振时阻抗最小，并联电路谐振时阻抗最大。并联谐振电路的定义与串联谐振电路一样：在一定频率的交流激励信号作用下，当电路的干路电压与干路电流达到同相时，称为电路进入谐振状态。

$$\text{由 } \omega L=1/\omega C \text{ 解出: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ 或 } f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (\text{公式 2.3.1})$$

ω_0 为电路的谐振频率，这与串联谐振电路谐振频率的计算公式 2.2.1 完全相同。

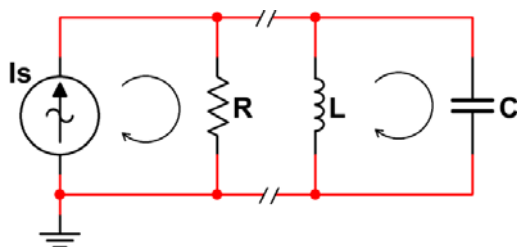


图 2.3.2 发生谐振时的 RLC 并联电路

由以上分析可知，RLC 并联电路进入谐振状态时，电路中的电感与电容元件似乎都不存在了，好像只存在电阻（图 2.3.2）。其原因如同 2.2.2.2 节中的分析：电感与电容都是储能元件，当电路发生谐振时，能量在电感与电容之间相互转移，电流源提供的能量只消耗在电阻 R 上。

根据品质因数的定义：谐振时储能元件（电感、电容）上储存的功率（无功功率）与电阻上消耗掉的有功功率之比，可以得出并联谐振电路品质因数 $Q = \text{电感或电容上的无功功率 } Q_P / \text{电阻 } R \text{ 上消耗的有功功率 } P$ 。因为 $Q_P = U^2 / (\omega_0 L) = U^2 \omega_0 C = U^2 / \sqrt{L/C}$ ， $P = U^2 / R$ ，所以：

$$Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}} \quad (\text{公式 2.3.2})$$

这与串联谐振电路品质因数[公式 2.2.5](#)： $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ 恰好成倒数关系。同样，我们把谐振时的感抗（或容抗）称为**特性阻抗**，用希腊字母 ρ 表示，即： $\rho = \omega_0 L = 1 / (\omega_0 C) = \sqrt{L/C}$ ，所以并联电路品质因数也可以写成这种形式： $Q = R / \rho$ 。

● 谐振时电感电流与电容电流

图 2.3.1 电路中电感上的电流 $I_L = I_S \cdot Z / j\omega L$ ，发生谐振时， $Z = Z_0 = R$ ， $\omega = \omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$ ，所以 $I_{L0} = -j \frac{I_S R}{\sqrt{L/C}}$ ，再将公式 2.3.2 代入，得： $I_{L0} = -jQ I_S$ ；同样还可以得到电容上的电流： $I_{C0} = jQ I_S$ ，所以： $I_{L0} = -jQ I_S$ ， $I_{C0} = jQ I_S$ ， $I_{L0} = I_{C0} = Q I_S$ (公式 2.3.3)

由此可见，RLC 并联电路发生谐振时，电感与电容上的**电流**是输入电流的 Q 倍，当品质因数 Q 较高时， I_{L0} 与 I_{C0} 将变得很大，这有可能会造成电路元件损坏，需要特别注意。因此有些教材也把并联谐振也称为**电流谐振**，串联谐振有时称作**电压谐振**（参考[公式 2.2.10](#)），这一点上串联谐振与并联谐振也成对偶关系。

2.3.2 Lab2.3-1 并联谐振曲线测量与绘制

实验目的

- 通过测量绘制谐振曲线掌握并联谐振的特性；
- 学习并联谐振曲线绘制的实验技巧；
- 与前面串联谐振曲线测量绘制实验做比较，分析其中的异同；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) HPI-1000(plus)口袋仪器
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子.....

实验介绍

在 2.2 串联谐振一节里，我们是围绕着谐振曲线的测量与分析展开的，因为谐振曲线能够揭示电路的很多特性。并联谐振也可以测量绘制谐振曲线，我们依然通过分析研究谐振曲线看看并联谐振电路有哪些特性。

实验原理

根据 2.2.2.1 节分析可知：RLC 串联电路的谐振曲线本质是谐振时电路的阻抗 $Z_0=R$ 与各个频率下电路总阻抗 Z 的比值，即： R/Z 与频率的关系 ($R/Z \sim f$) 就是谐振曲线（分为幅频与相频曲线）。这就是说串联谐振曲线的本质反映的是电阻 R 与电路总阻抗 Z 的比值随频率的变化关系，因此把本教程把 R/Z 称作串联谐振本质式（公式 2.2.4）。

按照这个思路，我们测量图 2.3.1 所示电路各个频率下的电压 $U=I_s \cdot Z$ 与谐振时的电压 $U_0=I_s \cdot R$ 的比值，就可以得到 RLC 并联电路的谐振曲线 ($Z/R \sim f$)。因此， Z/R 可以称作并联谐振曲线的本质式， U/U_0 可以称作并联谐振曲线的定义式。二者等价，即：

$$U/U_0 = Z/R \quad (\text{公式 2.3.4})$$

对比串联谐振曲线本质式 R/Z 与并联谐振曲线本质式 Z/R ，可以看到二者成对偶关系。串联电路发生谐振时电路总阻抗最小 ($Z_0=R$)，因此串联谐振曲线 R/Z 是一条最大值为 1 的独峰曲线。并联电路发生谐振时电路总阻抗最大 ($Z_0=R$)，采用 Z/R 形式时并联谐振曲线也是一条最大值为 1 的独峰曲线，这与串联谐振曲线形态上一致。个别教材也有采用 $R/Z \sim f$ 曲线作为并联谐振曲线的，那样画出来就是一条最小值为 1 的下凹曲线。

几乎所有教材讲并联谐振电路时都使用电流源作为电路的激励源（图 2.3.1），为何不使用电压源呢？试想如果把图 2.3.1 中的电流源换成电压源 U_s ，当信号频率为 0 时，电感 L 的感抗 $\omega L=0$ ，相当于电压源短路，电路电流无穷大；同样，信号频率无穷大时，电感 C 的容抗 $1/\omega C \rightarrow 0$ ，也相当于电压源短路，电路电流无穷大。这当然是理想电路、理想元件的情况下才会出现电流无穷大的情况，但会给理论推导带来困扰。

基于电流源搭建实际电路测量绘制并联谐振电路曲线不是很方便，因为常用的信号源都是电压输出型的，电流输出型信号源并不常见。因此这里把图 2.3.1 电路改为常用的电压型信号源模型（图 2.3.3）。

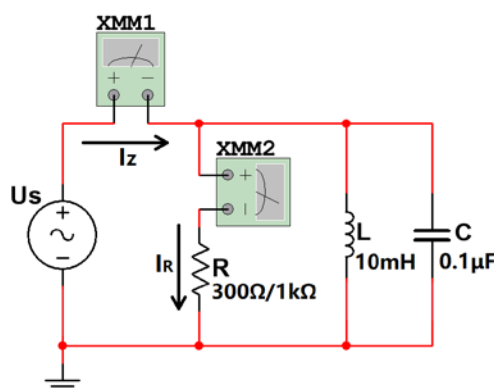


图 2.3.3 电压源的 RLC 并联电路

我们做实验时信号频率范围在 0.5~9.5kHz，在这个频率范围，感抗、容抗都是存在的；同时，实际电路中的电压源、电感元件、电容元件都是存在内阻的，因此实际电路上并不会出现电流无穷大的情况。

图 2.3.3 电路中电阻 R 上流过的电流 $I_R = U_s / R$ ，电路总电流 $I_z = U_s / Z$ ，所以 $I_R / I_z = Z / R$ ；根据公式 2.3.4，通过测量绘制 $I_R / I_z \sim f$ 曲线，依然可以得到并联电路的谐振曲线，可见通过图 2.3.3 电路测量绘制并联谐振曲线在原理上是行得通的， I_R / I_z 可以称作并联谐振曲线的测量式。

将两块万用表如图 2.3.3 串接入电路，使用万用表测量各个频率下流过电阻 R 的电流值 I_R 与电路总的电流值 I_z ，然后以信号频率 f 为横轴， I_R / I_z 比值为纵轴描点做出曲线与就能得到并联电路的谐振曲线（ $Z/R \sim f$ ）中的幅频曲线（ $Z/R \sim f$ ）。

实验过程

按照图 2.3.3 在 HA-MB03A 实验板上搭建电路，让 HPI-1000(plus)多功能口袋仪器的 AO1 信号源产生一个 $6V_{p-p}$ ，频率 0.5~9.5kHz 的正弦波作为输入信号 U_s 。使用万用表交流毫安（mA）档测量流经电阻 R 的电流 I_R 与电路的总电流 I_s ；然后改变输入信号的频率，再记录下一组电流值。最后将电流值 I_s 、 I_R 与对应的输入信号频率 f 记录在一个 Excel 表格中（表 2.3.1）。这个实验我们取 $R=300\Omega$ 与 $1k\Omega$ 两个阻值，测量绘制两条谐振曲线，然后进行分析比较。为了提高测量精度，测量过程有以下几点需要注意：

- 要用套件中配置的航空导线连接电路，并且导线要用剥线钳剪切到合适的长度，不可过长；
- 为了读数准确，一定要将万用表表笔固定在 HA-MB03A 实验板上专用的表笔座上，然后用套件中配备的红黑杜邦线插入器件孔，待读数稳定后再记录（参考图 2.2.6）；
- 为了提高测量效率，可以使用两块万用表分别测量总电流 I_s 与电阻上的电流 I_R ，但要注意的是要让两块表的系统读数误差一致（可以使用万用表的相对值测量功能）。其中一块万用表已经占用 HA-MB03A 实验板上专用的表笔座了，另外一块表可以用短接线紧密的缠绕在表笔头上后串接在电路中，这样电流值读取才准确。

频率 (kHz)	R=300Ω			R=1kΩ		
	I _z (mA)	I _R (mA)	I _R /I _z	I _z (mA)	I _R (mA)	I _R /I _z
0.5	18.82	3.71	0.197	17.52	1.16	0.066
1	16.62	4.25	0.256	15.31	1.34	0.088
1.5	14.19	4.71	0.332	12.73	1.5	0.118
2	12.05	5.03	0.417	10.31	1.61	0.156
2.5	10.27	5.24	0.510	8.16	1.69	0.207
3	8.98	5.37	0.598	6.48	1.72	0.265
3.5	7.94	5.46	0.688	4.97	1.75	0.352
4	7.31	5.5	0.752	3.96	1.77	0.447
4.5	6.94	5.53	0.797	3.37	1.77	0.525
4.7	6.85	5.54	0.809	3.24	1.77	0.546
4.8	6.81	5.54	0.814	3.2	1.77	0.553
4.9	6.78	5.54	0.817	3.17	1.77	0.558
5	6.76	5.54	0.820	3.16	1.77	0.560
5.2	6.73	5.55	0.825	3.2	1.77	0.553
5.5	6.74	5.55	0.823	3.32	1.77	0.533
6	6.88	5.54	0.805	3.82	1.76	0.461
6.5	7.11	5.53	0.778	4.44	1.75	0.394
7	7.49	5.51	0.736	5.24	1.73	0.330
7.5	7.82	5.49	0.702	5.88	1.72	0.293
8	8.25	5.47	0.663	6.62	1.7	0.257
8.5	8.76	5.44	0.621	7.45	1.68	0.226
9	9.07	5.41	0.596	7.89	1.67	0.212
9.5	9.76	5.37	0.550	8.89	1.64	0.184

表 2.3.1 测量数据

需要注意的是表 2.3.1 中记录的电流值并不是电路中真实的交流电流有效值，这是因为手持式万用表交流电流频响范围同交流电压一样都是比较窄的，随着信号频率上升，测量读数有所衰减，但这并不影响我们在同一频率下得到的 I_R/I_S 电流比值的正确性。另外，为了准确找出谐振频率，在理论谐振频率（5kHz）附近，将输入信号频率增加步长由 500Hz 减小到 100Hz，加密了采样点。

以表 2.3.1 中 I_R/I_z 的比值做纵轴，频率 f 做横轴，描点连接而成的曲线就是并联电路的谐振曲线（图 2.3.4）。

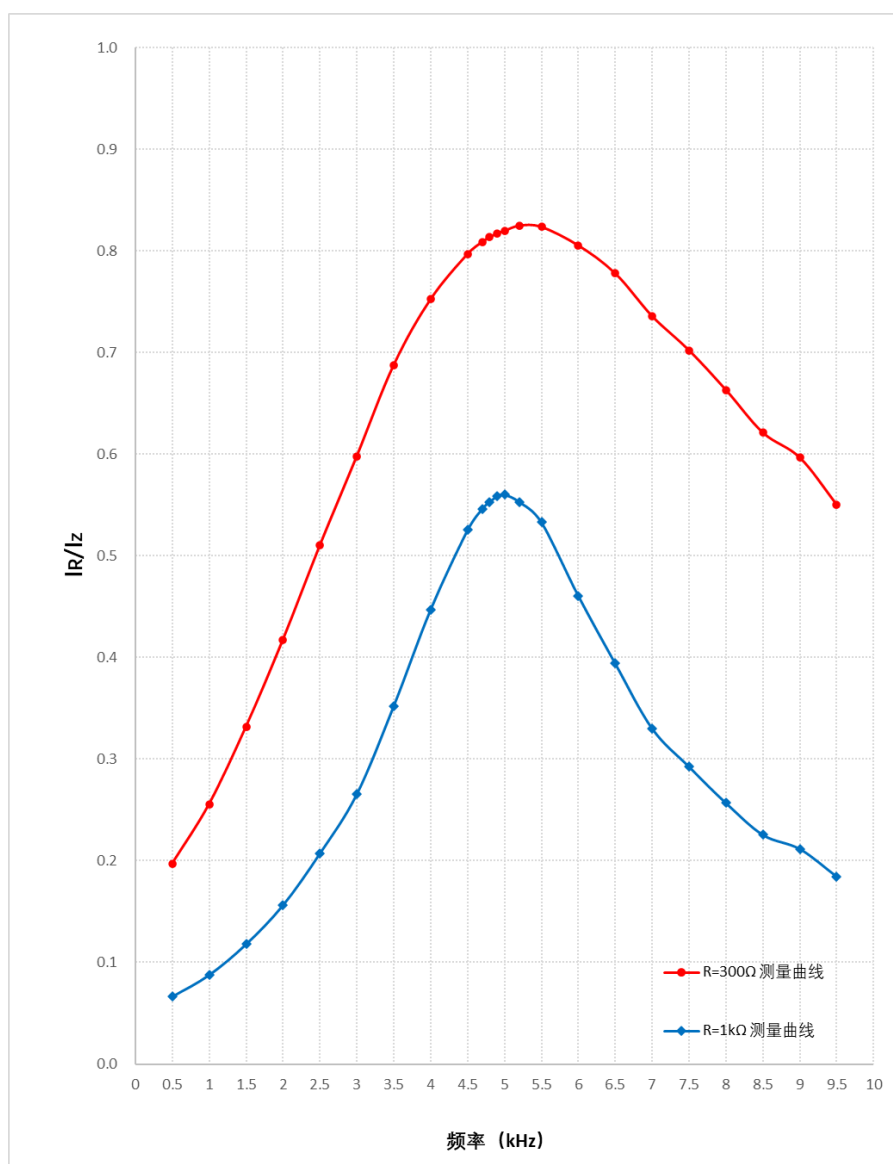


图 2.3.4 谐振曲线

从图 2.3.4 可以看出：电路中电阻值较大的曲线（ $R=1k\Omega$ ，蓝色）比电阻值较小的曲线（ $R=300\Omega$ ，红色）谐振峰要陡峭，这与串联谐振曲线恰好相反，这也验证了并联谐振电路的品质因数（[公式 2.3.2](#)）与串联谐振电路品质因数（[公式 2.2.5](#)）成倒数关系。

实验分析

从理论上分析，谐振曲线当发生谐振时（ $f=f_0$ ）， $I_R/I_Z=1$ ，即谐振曲线的最大值应该等于 1。但从图 2.3.4 或表 2.3.1 中可以看到： $R=300\Omega$ （实际测量值 301Ω ）时，谐振曲线最大值约为 0.82； $R=1k\Omega$ 时，谐振曲线最大值约为 0.56。这种现象在 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量与绘制](#) 实验中也出现过，究其原因主要是电感与电容的内阻造成的，并给出了修正方法。我们接下来对图 2.3.4 曲线进行修正。

在 [Lab2.2-3 电感值、电容值及内阻精确测量](#) 中实验中对 HA-MB03A 电路分析实验板上标称值为 $10mH$ 电感与 $0.1\mu F$ 电容的内阻与实际感（容）值。用实际测量值取代元件标称值，把内阻也考虑进去，图 2.3.3 电路实际模型如图 2.3.5 所示。

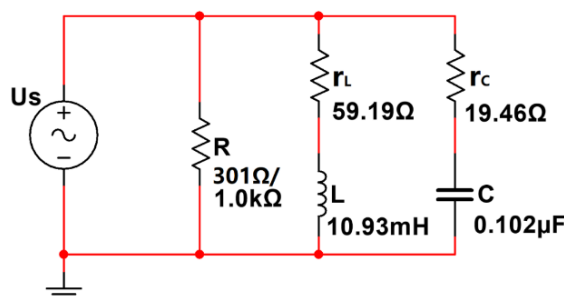


图 2.3.5 RLC 并联电路实际模型

图 2.3.5 电路中的 r_L 与 r_C 是电感与电容的内阻，但它们与元件以串联形式出现并联电路中，这样不好计算它们对电路产生的影响，首先要改成并联的结构（图 2.3.6）。



图 2.3.6 元件模型结构变换

以电感为例，根据阻抗与导纳的关系可以在串并结构间相互转换，由图 2.3.6 左可得： $Z_L = r_L + j\omega L$ ；由图右可得： $Y_L = 1/r_L' - j/\omega L'$ 。因为 $1/Z_L = \frac{r_L - j\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2} = Y_L$ ，所以 $1/r_L' - j/\omega L' = \frac{r_L - j\omega L}{r_L^2 + (\omega L)^2}$ ，化简后得： $L' = L + \frac{r_L^2}{\omega^2 L}$ ， $r_L' = r_L + \frac{(\omega L)^2}{r_L}$ (公式 2.3.5)

对于电容可以用同样的方法将串联结构转换为并联结构，（过程略）化简后得：

$$C' = \frac{C}{(\omega r_C)^2 + 1}, r_C' = r_C + \frac{1}{(\omega C)^2 r_C} \quad (\text{公式 2.3.6})$$

将 $L = 10.93\text{mH}$ ， $r_L = 59.19\Omega$ ； $C = 0.102\mu\text{F}$ ， $r_C = 19.46\Omega$ ； $\omega = 2\pi \times 5.0\text{kHz}$ 代入公式 2.3.5 与公式 2.3.6，计算得 $L' = 11.26\text{mH}$ ， $r_L' = 2049\Omega$ ； $C' = 0.102\mu\text{F}$ ， $r_C' = 5029\Omega$ 。令 $r' = r_L' // r_C' = 1456\Omega$ ，于是图 2.3.5 所示电路可以转换为图 2.3.7 所示。

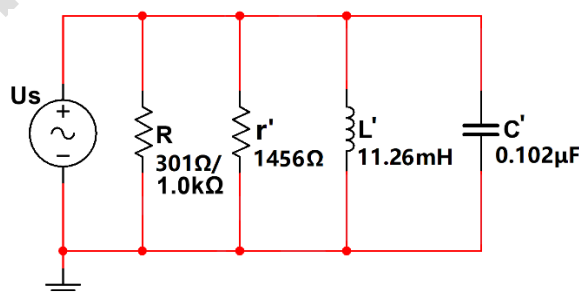


图 2.3.7 元件内阻改为并联结构的实际电路模型

由图 2.3.7 电路可知： $I_R \cdot R = I_{r'} \cdot r'$ ，所以 $I_{r'} / I_R = R / r'$ 。令修正系数 $k = (I_R + I_{r'}) / I_R = (R + r') / r'$ ，将 $R = 301\Omega / 1.0\text{k}\Omega$ ， $r' = 1405\Omega$ 代入，计算得 $k_1 = 1.21$ ($R = 301\Omega$ 时)， $k_2 = 1.71$ ($R = 1.0\text{k}\Omega$ 时)。根据修正系数对谐振曲线进行修正，得到下面的表 2.3.2，然后根据表 2.3.2 可得到测量曲线与修正曲线（图 2.3.8）。

频率 (kHz)	R=300Ω				R=1kΩ			
	I _Z (mA)	I _R (mA)	I _R /I _Z	修正值 k ₁ ·I _R /I _Z	I _Z (mA)	I _R (mA)	I _R /I _Z	修正值 k ₂ ·I _R /I _Z
0.5	18.82	3.71	0.197	0.238	17.52	1.16	0.066	0.112
1	16.62	4.25	0.256	0.309	15.31	1.34	0.088	0.148
1.5	14.19	4.71	0.332	0.401	12.73	1.5	0.118	0.199
2	12.05	5.03	0.417	0.504	10.31	1.61	0.156	0.263
2.5	10.27	5.24	0.510	0.616	8.16	1.69	0.207	0.349
3	8.98	5.37	0.598	0.722	6.48	1.72	0.265	0.448
3.5	7.94	5.46	0.688	0.830	4.97	1.75	0.352	0.594
4	7.31	5.5	0.752	0.908	3.96	1.77	0.447	0.754
4.5	6.94	5.53	0.797	0.962	3.37	1.77	0.525	0.886
4.7	6.85	5.54	0.809	0.976	3.24	1.77	0.546	0.922
4.8	6.81	5.54	0.814	0.982	3.2	1.77	0.553	0.933
4.9	6.78	5.54	0.817	0.986	3.17	1.77	0.558	0.942
5	6.76	5.54	0.820	0.989	3.16	1.77	0.560	0.945
5.2	6.73	5.55	0.825	0.995	3.2	1.77	0.553	0.933
5.5	6.74	5.55	0.823	0.994	3.32	1.77	0.533	0.899
6	6.88	5.54	0.805	0.972	3.82	1.76	0.461	0.777
6.5	7.11	5.53	0.778	0.939	4.44	1.75	0.394	0.665
7	7.49	5.51	0.736	0.888	5.24	1.73	0.330	0.557
7.5	7.82	5.49	0.702	0.847	5.88	1.72	0.293	0.493
8	8.25	5.47	0.663	0.800	6.62	1.7	0.257	0.433
8.5	8.76	5.44	0.621	0.750	7.45	1.68	0.226	0.380
9	9.07	5.41	0.596	0.720	7.89	1.67	0.212	0.357
9.5	9.76	5.37	0.550	0.664	8.89	1.64	0.184	0.311

表 2.3.2 谐振曲线测量值与修正值

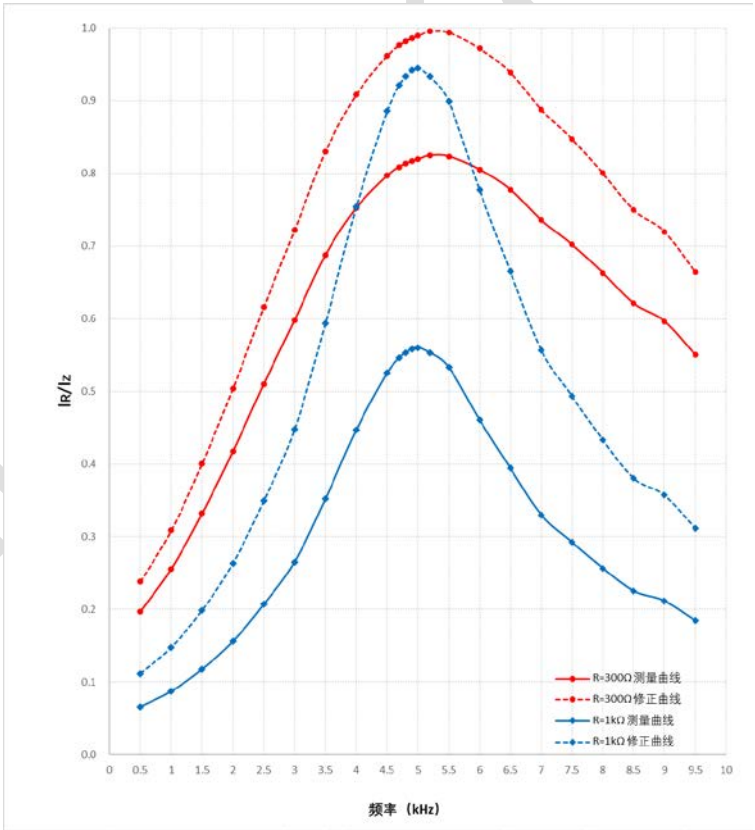


图 2.3.8 并联谐振测量曲线与修正曲线

从表 2.3.2 与图 2.3.8 可以看出，通过修正， $R=301\Omega$ 的谐振曲线的最大值为已经很接近理论值 1 了， $R=1.0k\Omega$ 的谐振曲线的最大值比理论值 1 低了 5% 左右。

2.3.3 并联谐振电路通频带

根据公式 2.3.4，并联电路谐振曲线： $Z/R=G/Y=\frac{G}{G+j(\omega C-1/\omega L)}=\frac{1}{1+jR(\omega C-1/\omega L)}$ ，将公式

2.3.2: $Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$ 代入，得： $Z/R=\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$ ；再将公式 2.3.1: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 代入，得：

$$Z/R=\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})} \quad (\text{公式 2.3.7})$$

公式 2.3.7 是并联谐振曲线的另一种相量表达式，与公式 2.3.4 等价，这个形式通常用来计算谐振电路带宽。对比公式 2.2.19: $R/Z=\frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$ ，我们发现串联谐振曲线与并联谐振

曲线表达式的形式是一致的，但这仅仅是形式上的一致：因为两个公式里面品质因数 Q 的定义不同，串联谐振与并联谐振品质因数成倒数关系。

并联谐振电路通频带的概念定义与串联电路一样，公式也都一致，即：带宽 $BW_f=f_H-f_L=f_0/Q$ 。由此可见，并联谐振电路同样是品质因数 Q 越高，通频带越窄；品质因数 Q 越低，通频带越宽（参考图 2.3.8）。

我们要计算图 2.3.5 电路的实际品质因数（考虑元件内阻）貌似无从下手，但如果采用变形等价电路（图 2.3.7）就可以根据公式 2.3.2: $Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$ 计算电路的 Q 值了，即：

$Q = \frac{R/r'}{\sqrt{L'/C'}}$ ，我们这里计算 $R=1k\Omega$ 时的 Q 值，将 $R=1k\Omega$ ， $r'=1456\Omega$ ， $L'=11.26mH$ ， $C'=0.102\mu F$ 代入，得到： $Q=1.78$ 。

将图 2.3.4 中 $R=1k\Omega$ 的测量曲线（蓝色实线）分离出来并加上标注（图 2.3.9），从图中可以看出：当 I_R/I_Z 曲线下降到 0.707 时对应的上下截止频率分别为： $f_H=6.5kHz$ ， $f_L=3.75kHz$ ，所以 $Q=f_0/(f_H-f_L)=5kHz/(6.5kHz-3.75kHz)=1.8$ ，这与上面的计算基本吻合。根据公式 2.2.22: $f_0=\sqrt{f_L f_H}$ ，计算得： $f_0=4.94kHz$ ，这与图 2.3.9 中显示的 $f_0=5kHz$ 相差 1.2%。

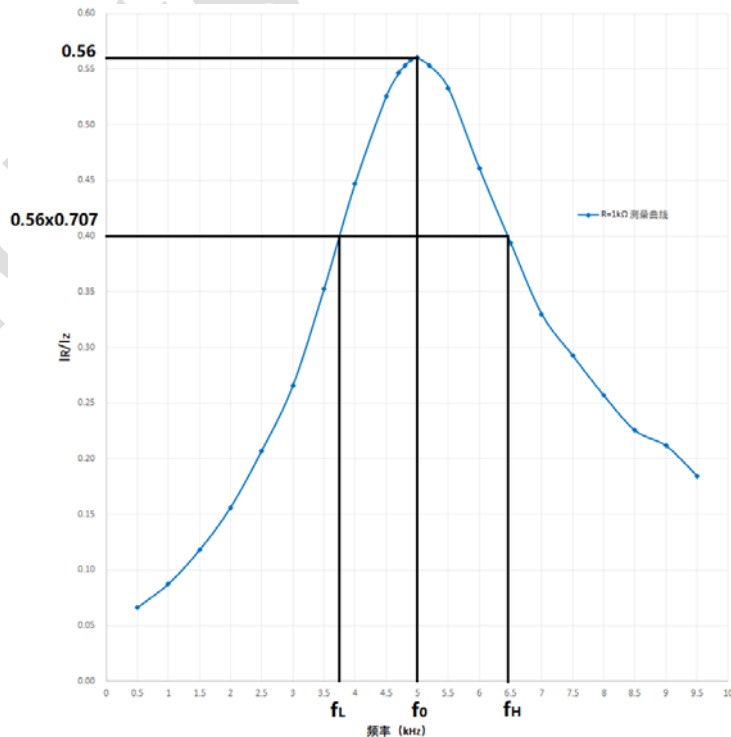


图 2.3.9 并联谐振曲线通频带

2.3.4 *元件串联模型与并联模型

在 [Lab2.3-1 并联谐振曲线测量绘制](#) 实验分析中，为了对谐振曲线进行修正，我们把元件内阻的串联结构改为并联结构。这一变换在实际工程应用中经常遇到，这一节对此进行深入研究。

2.3.4.1 串联模型（Series Model）与并联模型（Parallel Model）

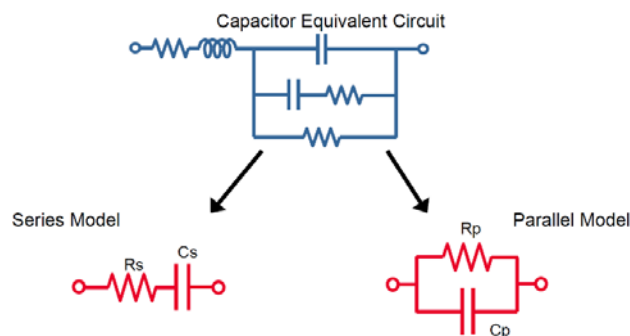


图 2.3.10 元件等效模型

图 2.3.10 中蓝色部分是一个实际电容元件的等效电路，我们可以看到里面结构很复杂，用这样的模型是无法进行分析计算的，必须进行简化，于是可以得到两种简化模型：电容与内阻串联的串联模型（Series Model），电容与内阻并联的并联模型（Parallel Model）。电感元件一样可以分为电感与内阻的串联模型和并联模型。

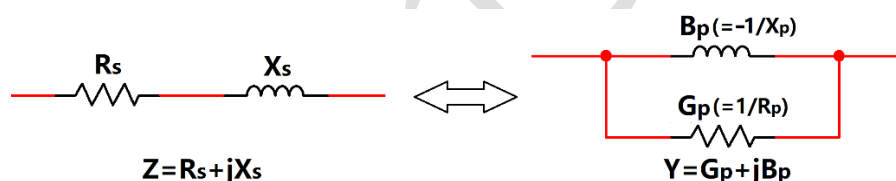


图 2.3.11 元件串联模型与并联模型

图 2.3.11 中 X_s （或 B_p ）所指代的元件不一定是电感，也可以是电容。图左串联模型的阻抗 Z 与图右并联模型的导纳 Y 成倒数关系，即： $1/Z=Y$ ，所以：

$\frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} - j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2} = G_p + jB_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p}$ ，从而得到串并联模型转换关系：

$$\begin{cases} R_p = R_s + \frac{X_s^2}{R_s} \\ X_p = X_s + \frac{R_s^2}{X_s} \end{cases} \quad (\text{公式 2.3.8})$$

从公式 2.3.8 可以看出同一个元件采用不同结构模型，特征值（感值或容值）与内阻值是不同的。有些读者对此就有疑问了：同一个元件到底串行参数是准确的还是并行参数是准确的呢？从图 2.3.11 可以看出一个实际元件可以等效为串联电路或并联电路，要让这两种电路的对外阻抗特性（相量）等价，那元件的参数就会随着电路结构的改变而变化。所以说串联参数或并联参数都是元件的真实等效参数，使用哪种形式的参数要看具体应用场景。

2.3.4.2 Lab2.3-2 使用 LCR 表测量元件参数

实验目的

- 通过实际测量验证元件串联模型与并行模型理论；
- 了解 LCR 表工作原理；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) Agilent E4980A 精密型 LCR 表
 - b) 短接线、剥线钳、镊子.....

实验原理

准确测量电阻、电感、电容元件的参数是工程应用中必不可少的环节。我们在 [Lab2.2-3 电感、电容值及内阻测量](#) 实验中用的是一种原理性测量方法，实际工程应用中要使用 LCR 表（图 2.3.12）。



图 2.3.12 Agilent E4980A 精密型 LCR 表

LCR 表也叫 LCR 电桥，是一种测量电阻、电感、电容元件在各个频率下特征值、内阻、Q 值、D 值等参数的精密仪器，其工作原理如图 2.3.13 所示。

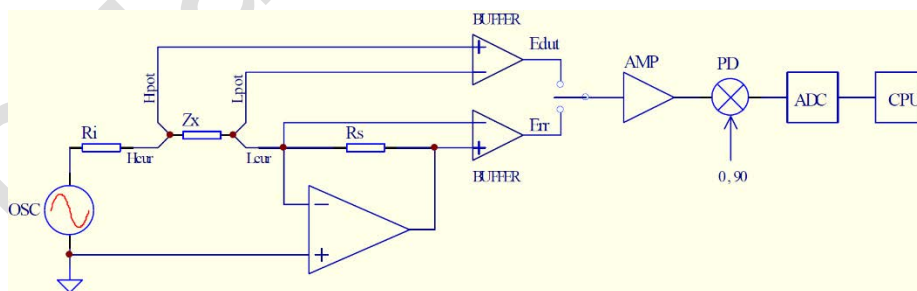


图 2.3.13 LCR 表原理框图

图 2.3.13 中，OSC 为信号频率与电平一定的正弦信号源，该信号源通过信号源内阻 R_i 施加于被测器件 Z_x ，Hpot 和 Lpot 采样施加于 Z_x 上的电压 E_{dut} 。Hcur 为信号源输出端，Lcur 为电流检测端，流过 Z_x 的电流 I_x 由 Lcur 经运放（I-V 转换器）通过标准电阻 R_s 转化为电压 E_{err} 。 E_{dut} 、 E_{err} 经检相器 PD、模数转换器 ADC 送至 CPU，计算得到所需的阻抗参数。其本质还是测量被测器件 Z_x 上电压信号、电流信号幅值以及两个信号相位差，这与 [Lab2.2-3 电感、电容值及内阻测量](#) 实验原理相同，只不过测量精度要高得多。

实验过程

LCR 表可以将待测元件设置为串联模型或并联模型，分别能测量出这两种模型下元件参数值。我们用这两种模型测量 HA-MB03A 实验板上标称值为 10mH 的工字电感、0.1 μ F 贴片电容，结果如下（图 2.3.14）。



图 2.3.14 电感电容测量结果（左：串联模型，右：并联模型）

我们在 [Lab2.2-3 电感、电容值及内阻测量](#) 实验中的测量结果与 [Lab2.3-1 并联谐振曲线测量绘制](#) 实验中计算结果分别是 $L_s=10.93\text{mH}$, $R_s=59.19\Omega$; $L_p=11.26\text{mH}$, $R_p=2.049\text{k}\Omega$; $C_s=0.102\mu\text{F}$, $R_s=19.46\Omega$; $C_p=0.102\mu\text{F}$, $R_p=5.029\text{k}\Omega$ 。对比图 2.3.14 中 LCR 表测量结果在数量级与趋势上是一致的。

用 LCR 表测量的元件参数与实验测量计算的参数有一定误差，一方面是测量条件不同造成的——这一点在 [Lab2.4-2 口袋仪器测量准确度分析](#) 中会通过实验进行分析，另一方面就是模型选取造成的。对于低内阻元件在低频段尽量应该选用串联模型，反之则选取并联模型，这样得到的结果精度比较高；这也不是绝对的，更重要的是根据实际电路情况选择，比如我们在分析并联谐振电路时就要选取并联模型，否则分析起来会异常繁琐。

2.3.4.3 并联电路谐振频率

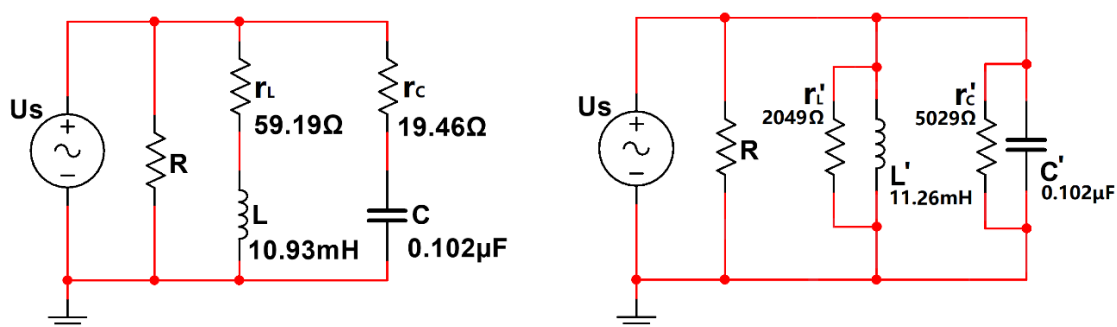


图 2.3.15 并联谐振电路（左：元件串联模型，右：元件并联模型）

图 2.3.15 电路就是 [Lab2.3-1 并联谐振曲线测量绘制](#) 实验中 [图 2.3.5](#) 与 [图 2.3.7](#) 所示电路，元件参数标注值也是之前实验的测量值。根据 [公式 2.3.1](#)，图 2.3.25 电路的谐振频率

$$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad \text{将中} \quad \text{公式 2.3.5} \quad \text{与} \quad \text{公式 2.3.6} \quad \text{代入，得：} \quad \omega_0'^2 = \frac{1}{\frac{\omega_0'^2 L^2 + r_L^2}{\omega_0'^2 L} \times \frac{C}{(\omega_0' C r_C)^2 + 1}}$$

整理可得： $C(\omega_0'^2 L^2 + r_L^2) = L[(\omega_0'^2 C r_C^2 + r_L^2) + 1]$ ，再将特性阻抗公式 $\rho = \sqrt{L/C}$ 代入化简后可得：

$\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C}} \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}$ ；令 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ，其中 ω_0 是图 2.3.15 电路的元件组成串联谐振电路时的谐振频率（此时元件采用串联模型），于是最终得到：

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}, \quad \text{其中} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{L/C} \quad (\text{公式 2.3.9})$$

从公式 2.3.9 可以看出，同样的元件（具有内阻的实际元件）组成串联电路时与组成并联电路时的谐振频率是有一点差别的。通常电容的内阻 r_C 比较小（串联模型），可以忽略不记，

$$\text{于是公式 2.3.9 简化为：} \quad \omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_L^2}{\rho^2}} \quad (\text{公式 2.3.10})$$

从公式 2.3.10 可以知道以下几点：

- 实际电感（有内阻）与电容组成的并联电路的谐振频率理论上要略低于同一元件组成的串联电路，变化的程度与电感的内阻 r_L 有关；
- 只有电感的内阻 r_L 小于电路的特性阻抗 ρ 的时候，公式 2.3.10 才有实数解，对应到电路也就是满足此条件电路才能发生谐振。

有些读者对上述结论难以理解，觉得同一电感组成串联电路与组成并联电路的谐振频率为何就发生了变化了，难道是元件的特性发生了变化了？对这个问题只要从谐振的定义与本质出发就能理解。无论是串联谐振还是并联谐振，发生谐振指的是电路中的电流与电压同相，这就要求电路中的总电抗（或电纳）为零。实际电感因为内阻的存在，导致串联模型和并联模型下电抗（或电纳）值是不同的，因此导致让电路处于总电抗（或电纳）为零的信号频率发生的变化。

这不是元件的特性发生了变化引发的谐振频率变化；只有在同一结构模型（串联或并联）下元件参数发生了变化才是元件特性的变化，元件特性发生变化同样会导致谐振频率发生改变，这将在 [2.4.1 节](#) 进行分析研究。

我们将图 2.3.15 右的元件参数 L' 与 C' 代入公式 $\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ ，直接计算出 $f_0' = 2\pi\omega_0' = 4.7\text{kHz}$ ；也可以将图 2.3.15 左的元件参数 L 、 C 、 r_L 、 r_C 代入公式 2.3.9，计算得：

$\sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}} = 0.98572$ ，同样能得到 $f_0' = 4.7\text{kHz}$ ，这验证了上面的分析推导是正确的。细心的读者可能又会发现一个问题：按照上面的分析，同一实际元件构成的并联谐振电路应该比串联谐振电路的谐振频率低一点，但是对比 [图 2.3.4](#)（[表 2.3.1](#)）与 [图 2.2.7](#)（[表 2.2.1](#)）会发现实际情况并非如此，反而是并联谐振频率略高一点，这是为什么呢？我们将在 [2.4.1 节](#) 的实验里讲解分析。

2.3.5 *LC 并联谐振电路

2.3.5.1 LC 并联谐振电路品质因数

如果把图 2.3.15 电路中的电阻 R 去掉，只剩下并联的电感与电容，这时电感与电容的内阻（主要是电感的内阻）将取代电路中 R 的作用，电路依然是会发生谐振的，并且品质因数 Q 会比较大。这种电路称为 LC 并联谐振电路（图 2.3.16）。

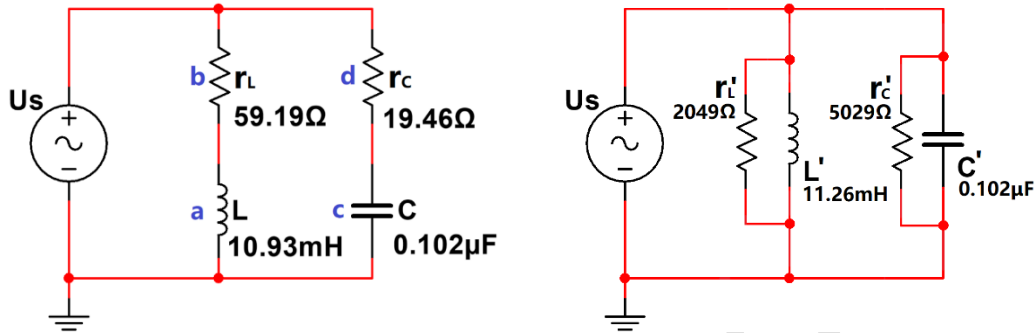


图 2.3.16 LC 并联谐振电路

根据公式 2.3.2，图 2.3.16 电路的品质因数 $Q' = \frac{r_L'/r_C'}{\sqrt{L'/C'}}$ ，为了用元件串联模型参数 L 、 C 、 r_L 、 r_C 表示，可以将公式 2.3.5 与公式 2.3.6 代入化简，但是过程会非常繁琐。我们可以换一个思路从品质因数的定义来化简。

根据 2.2.2.2 节品质因数的定义：谐振时储能元件（电感、电容）上储存的功率（无功功率）与电阻上消耗掉的有功功率之比即为电路的品质因数，可知：图 2.3.16 左电路发生谐振时电感 L （或电容 C ）上消耗的无功功率与内阻 r_L 、 r_C 上消耗的有功功率之比就是电路的品质因数 Q' 。

为了描述简单，我们在图 2.3.16 左电路定义： $a=\omega_0'L$ ， $b=r_L$ ， $c=1/\omega_0'C$ ， $d=r_C$ ；其中 ω_0' 是该电路的谐振频率，根据公式 2.3.9： $\omega_0' = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}$ ，其中 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ， $\rho = \sqrt{L/C}$ ；令 $k = \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}$ ，于是得： $\omega_0' = k\omega_0$ 。

根据品质因数定义可以得到 $Q' = \frac{(\frac{U_s}{a+b})^2 a}{(\frac{U_s}{a+b})^2 b + (\frac{U_s}{c+d})^2 d} = \frac{a(c+d)^2}{b(c+d)^2 + d(a+b)^2}$ ，因为发生谐振时电感上的无功功率与电容上的无功功率在数值上是相等的（一个储能元件释放能量、另一个储能元件吸收能量，然后循环往复），所以 $(\frac{U_s}{a+b})^2 a = (\frac{U_s}{c+d})^2 c$ ，即： $\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} = \frac{a}{c}$ ，将其代入上式化简得： $Q' = \frac{ac}{bc+ad}$ ；再将 $a=\omega_0'L$ ， $b=r_L$ ， $c=1/\omega_0'C$ ， $d=r_C$ 代回化简得： $Q' = \frac{L/C}{\frac{r_L}{\omega_0 C} + \omega_0' L r_C}$ ；

将 $\omega_0' = k\omega_0$ ， $\rho = \sqrt{L/C}$ 代入，得： $Q' = \frac{\rho}{r_L/k + k r_C}$ ，再将 $k = \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}$ 代回，最终得：

$$Q' = \frac{\rho}{r_L \sqrt{\frac{\rho^2 - r_C^2}{\rho^2 - r_L^2}} + r_C \sqrt{\frac{\rho^2 - r_L^2}{\rho^2 - r_C^2}}}, \text{ 其中 } \rho = \sqrt{L/C} \quad (\text{公式 2.3.11})$$

通常电容的内阻 r_c 比较小（串联模型），可以忽略不计，于是公式 2.3.11 可以简化为：

$$Q' = \sqrt{\frac{\rho^2}{r_L^2} - 1}, \text{ 其中 } \rho = \sqrt{L/C} \quad (\text{公式 2.3.12})$$

如果特性阻抗远大于电感内阻，即： $\rho \gg r_L$ ，则公式 2.3.12 可以近似为： $Q' \approx \frac{\rho}{r_L} = \frac{\sqrt{L/C}}{r_L}$ ；

对比该式与串联谐振电路品质因数公式 2.2.5： $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ ，可以发现：电感线圈（考虑内阻的电感元件）与电容（内阻忽略）组成的高 Q 值并联谐振电路的品质因数公式形式竟然与串联谐振电路的品质因数公式是一致的。由此可见，在分析具体电路时，不能机械套用公式，而是要首先弄懂定义与概念。下面用**电感线圈**指代考虑内阻的实际电感元件。

2.3.5.2 Lab2.3-3 LC 并联谐振曲线测量绘制

实验目的

- 通过测量分析 LC 并联谐振曲线，进一步分析并联谐振电路各种特性；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - HPI-1000(plus)口袋仪器
 - 万用表
 - 短接线、剥线钳、镊子……

实验说明

这个实验比较简单，过程与注意事项可以参考 [Lab2.3-1 并联谐振曲线测量绘制](#) 实验，实验的重点是结合并联谐振电路特性对得到的谐振曲线进行分析。

实验过程

我们在 HA-MB03A 实验板上按照图 2.3.17 所示搭建一个 LC 并联谐振电路进行实际测量。

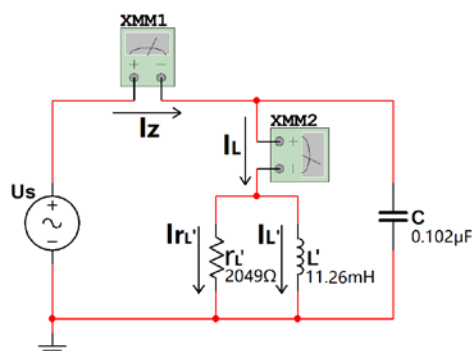


图 2.3.17 LC 并联谐振电路

图 2.3.17 电路中电感线圈要考虑内阻 r_L (采用并联模型), 电容 C 忽略内阻 r_C , 按理想电容处理。使用 HPI-1000(plus) 多功能口袋仪器的 AO1 信号源产生一个 $6V_{p-p}$, 频率 $0.5\sim 9.5kHz$ 的正弦波作为输入信号 U_s 。用万用表交流电流档分别测量不同频率下干路电流 I_z 与电感支路电流 I_L , 最后将干路电流 I_z 、电感电流 I_L 与对应的输入信号频率 f 记录在表 2.3.3 中。

频率 (kHz)	电感		
	I_z (mA)	I_L (mA)	I_L/I_z
0.5	16.59	16.84	1.015
1	14.53	15.22	1.047
1.5	12.05	13.35	1.108
2	9.64	11.62	1.205
2.5	7.42	10.09	1.360
3	5.60	8.91	1.591
3.5	3.84	7.83	2.039
4	2.55	7.02	2.753
4.5	1.62	6.33	3.907
4.7	1.51	6.20	4.106
4.8	1.44	6.08	4.222
4.9	1.41	5.97	4.234
5	1.42	5.85	4.120
5.2	1.57	5.63	3.586
5.5	1.94	5.35	2.758
6	2.77	4.91	1.773
6.5	3.68	4.51	1.226
7	4.60	4.17	0.907
7.5	5.44	3.88	0.713
8	6.31	3.60	0.571
8.5	7.08	3.37	0.476
9	7.85	3.15	0.401
9.5	8.62	2.95	0.342

表 2.3.3 测量数据

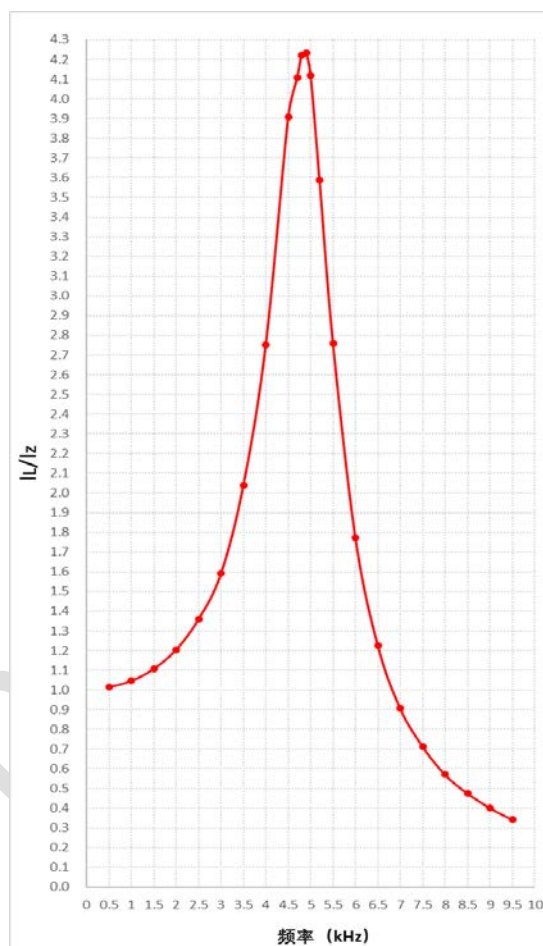


图 2.3.18 LC 并联电路电感电流曲线

需要注意的是测量得到的电感电流 I_L 其实是流过电感 L' 与内阻 r_L' 的电流 $I_{L'}$ 之和 (图 2.3.17)。另外, 由于万用表带宽限制, 表 2.3.3 中记录的电流值并不是电路中真实的交流电流有效值, 但这并不影响我们在同一频率下得到的 I_L/I_z 电流比值的正确性。为了准确找出谐振频率, 在理论谐振频率 (5kHz) 附近, 将输入信号频率增加步长由 500Hz 减小到 100Hz, 加密采样点。将 I_L/I_z 比值与频率 f 的关系做成曲线就是 LC 并联电路的电感电流曲线 (图 2.3.18)。

图 2.3.17 电路中流过电感 L' 的电流 $I_{L'} = \frac{I_z Z}{j\omega L'}$; 当电路发生谐振时, $Z_0 = r_L'$, $\omega_0' = \frac{1}{\sqrt{L'C}}$,

代入上式, 所以谐振时流过电感的电流 $I_{L0'} = -j \frac{I_z r_L' \sqrt{L'C}}{L'}$, 根据并联谐振电路品质因数公式

2.3.2 $Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$, 则有:

$$I_{L0'} = -jQ I_z, I_{L0'} = Q I_z, \text{ 其中 } Q = \frac{r_L'}{\sqrt{L'/C}} \quad (\text{公式 2.3.13})$$

由此可见，发生谐振时电感线圈中的电流是输入信号电流的 Q 倍，对于 LC 并联谐振电路这样的高 Q 值电路而言会是一个很大的值，这有可能会损坏电路中的元件，要特别注意。

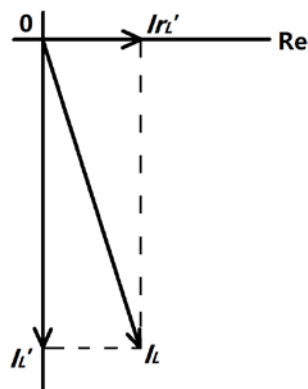


图 2.3.19 电感线圈电流 I_L 相量图

图 2.3.17 电路中电感线圈因为有内阻 r_L' 存在，所以电路中电感支路上三个相量 $I_L = I_L' + I_{L0}'$ (图 2.3.19)。发生谐振时，流过电感线圈内阻 r_L' 的电流 $I_{L0}' = I_Z$ ，也就是谐振时来自信号源的电流 I_Z 只流过电感线圈内阻 r_L' ，不流过电感与电容。根据公式 2.3.13: $I_{L0}' = -jQI_Z$ ，所以 $I_{L0} = I_{L0}' + I_{L0}' = -jQI_Z + I_Z$ ，即：

$$I_{L0} = (1 - jQ)I_Z, I_{L0} = \sqrt{1 + Q^2} I_Z, \text{ 其中 } Q = \frac{r_L'}{\sqrt{L'/C}} \quad (\text{公式 2.3.14})$$

我们把图 2.3.17 电路参数 $r_L' = 2049\Omega$, $L' = 11.26\text{mH}$, $C = 0.102\mu\text{F}$ 代入公式 2.3.14，可以计算出 $Q = \frac{r_L'}{\sqrt{L'/C}} = 6.167$, $\sqrt{1 + Q^2} = 6.25$ 。我们从图 2.3.18 上看到发生谐振时 I_{L0}/I_Z 并没有那么大，也就在 4.23 左右。这主要是我们在图 2.3.7 电路中忽略了电容 C 的内阻 r_C 造成的。因为公式 2.3.14 认为谐振时流过电感线圈内阻 r_L' 的电流 $I_{L0}' = I_Z$ 是在不考虑电容内阻的情况下，如果考虑电容内阻，则 $I_{L0}' < I_Z$ ，这样就造成 $I_{L0} < \sqrt{1 + Q^2} I_Z$ ，即： $I_{L0}/I_Z < \sqrt{1 + Q^2}$ 。

从能量的角度来看：元件内阻都造成了能量损耗（转化为热能），导致电流减小。元件内阻越大，系统阻尼越大，能量损失越多，导致图 2.3.18 电流曲线的峰值越低。元件内阻 (r_L 与 r_C) 与 RLC 并联谐振电路中外部电阻 R 对电路的影响是有区别的，这点在分析电路时应加以注意。

2.3.6 *Lab2.3-4 并联谐振电路各元件电流频率响应

实验目的

- 进一步研究分析并联谐振电路的特性；
- 对前面所学知识实验加以归纳总结；

实验器材

- Multisim 电路仿真软件

实验介绍

从系统的角度来看,研究并联谐振电路的种种特性实际主要就是分析电路各元件上电流信号的频率响应,比如:根据[公式 2.3.4](#) 并联谐振曲线的本质是电路总阻抗 Z 与电阻 R 之比随频率变化的关系,但研究时是通过分析电阻上电流信号 I_R 相对电路总电流 I_Z 的频率响应来完成的。这个实验通过 Multisim 软件中的波特图仪分析电路中各元件电流信号的频率响应,无需搭建实际电路。

实验过程与 [Lab2.2-5 串联谐振电路各元件电压频率响应](#) 实验很类似,实验结果也成对偶关系。

实验过程

- 电阻电流-频率响应

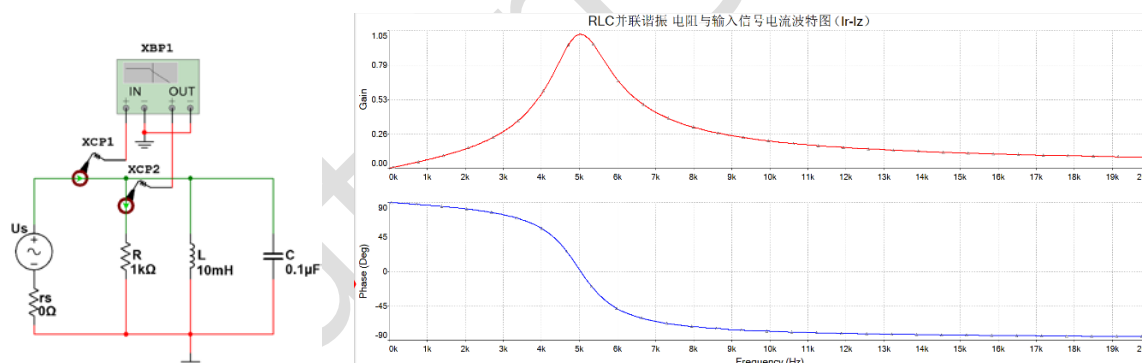
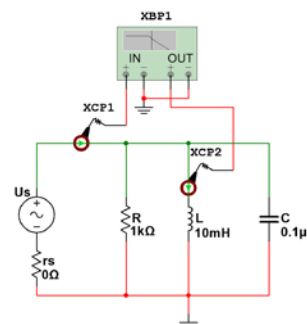


图 2.3.20 利用波特图仪测量 I_R 与 I_Z 信号的幅频、相频关系

Multisim 中的波特图仪输入为电压型信号,因此图 2.3.20 电路中要在输入端加入虚拟的电流探头。Multisim 的仿真规则禁止理想电感器与另一个理想电感器或是理想电压源并联 (it is illegal to place inductors in parallel with other inductors or with voltage sources), 所以要在干路中加一个 0Ω 的电阻 r_s , 这样仿真程序才能运行。仿真得到的曲线就是并联谐振曲线,大家可以与实验得到的谐振曲线 ([图 2.3.4](#)) 比较一下。

- 电感电流-频率响应

对比[图 2.2.21](#),可以发现:并联谐振电路电感电流频响曲线与串联谐振电路电感电压频响曲线成对偶关系。如果仔细看图 2.3.21 中红色的幅频曲线,还可以发现:电感电流极大值的出现频率并不



是谐振频率（5kHz），而是略低于谐振频率，这点与串联谐振电路也成对偶关系，产生的原因可以参考 [Lab2.2-4 串联谐振电路电感电压、电容电压曲线测量绘制](#) 实验。

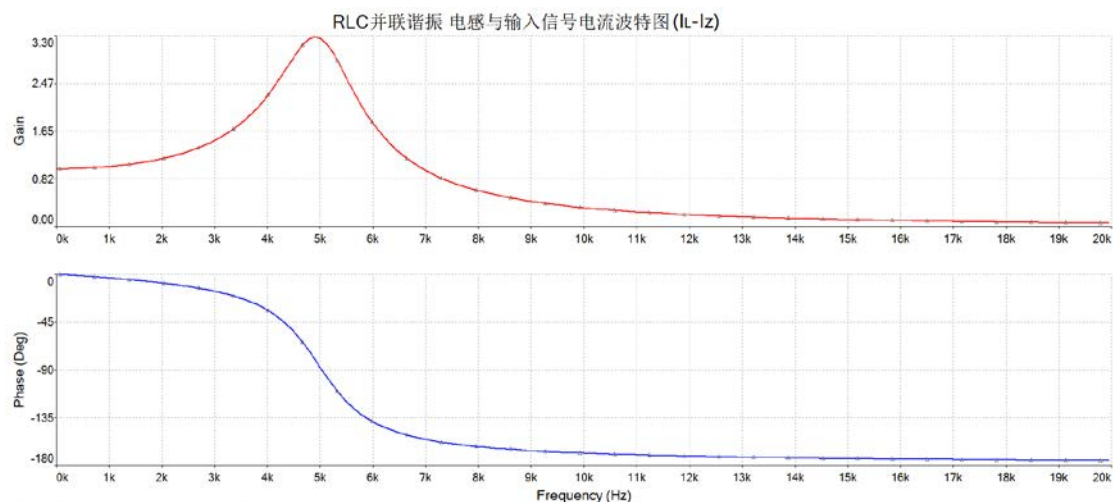


图 2.3.21 I_L 与 I_z 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

● 电容电流-频率响应

对比图 2.2.22，可以发现：并联谐振电路电容电流频响曲线与串联谐振电路电容电压频响曲线成对偶关系。如果仔细看图 2.3.22 中红色的幅频曲线，还可以发现：电容电流极大值的出现频率并不是谐振频率（5kHz），而是略高于谐振频率，这点与串联谐振电路也成对偶关系，产生的原因可以参考 [Lab2.2-4 串联谐振电路电感电压、电容电压曲线测量绘制](#) 实验。

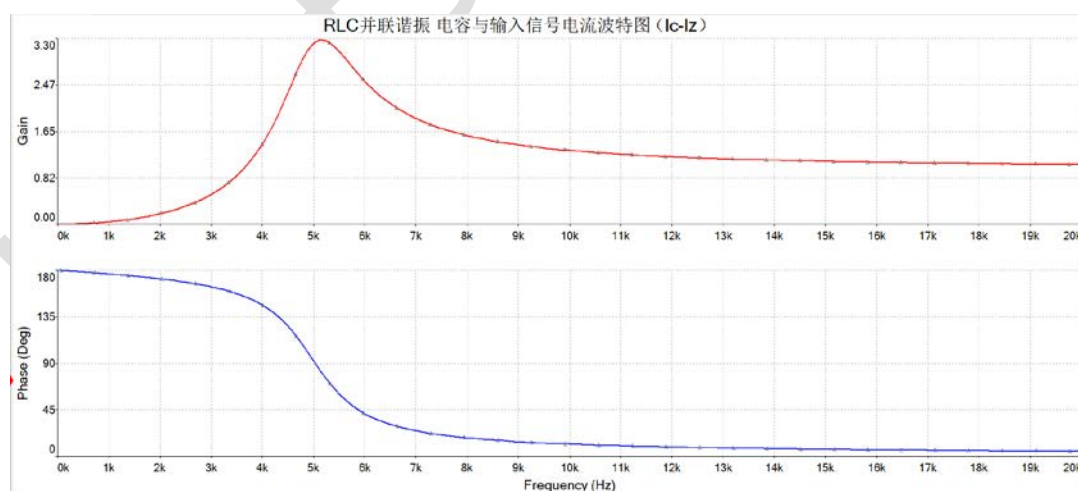
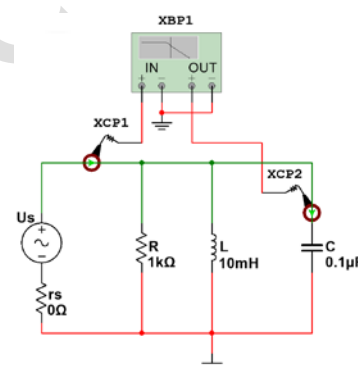
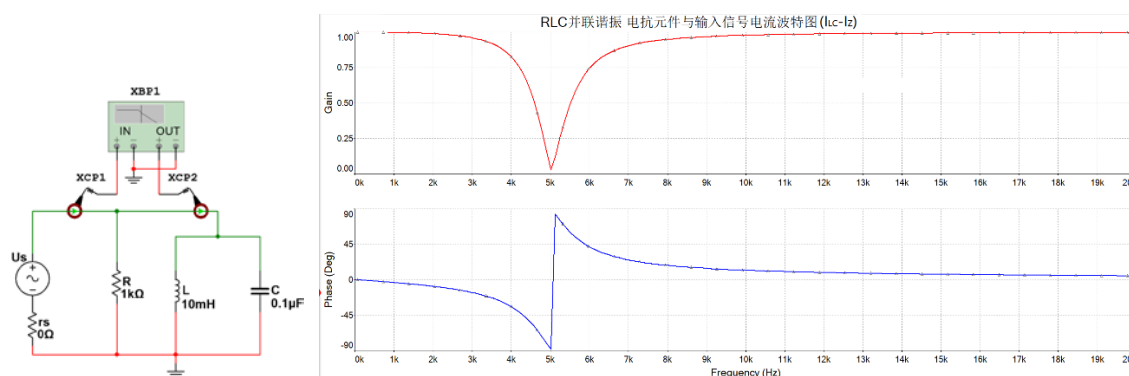


图 2.3.22 I_C 与 I_z 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

● 电抗元件电流-频率响应

图 2.3.23 I_{LC} 与 I_z 信号的幅频关系（红色）、相频关系（蓝色）

对比图 2.2.23，可以发现：并联谐振电路电抗元件电流频响曲线与串联谐振电路电抗元件电压频响曲线很类似。

这里再深入分析一下 RLC 并联电路中电抗元件的电抗频率特性。在串联电路中用阻抗分析比较简便，根据对偶关系，在并联电路中用导纳分析比较简便。

图 2.3.20 并联谐振电路中电感的导纳 $Y_L = jB_L = -j/\omega L$ （图 2.3.24a 左绿线），电容的导纳 $Y_C = jB_C = j\omega C$ （图 2.3.24a 左红线），所以并联谐振电路电抗元件上产生的导纳 $Y_{LC} = j(B_L + B_C) = j(\omega C - 1/\omega L)$ （图 2.3.24a 右黑线）。为了和串联电路保持一致，我们将图 2.3.24a 右图中的电纳曲线换做电抗曲线，即： $Z_{LC} = 1/Y_{LC} = 1/j(\omega C - 1/\omega L) = j/(1/\omega L - \omega C)$ （图 2.3.24b）。

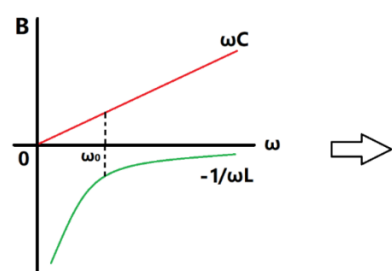


图 2.3.24a 并联谐振电路中电抗元件频率特性（电纳表示）

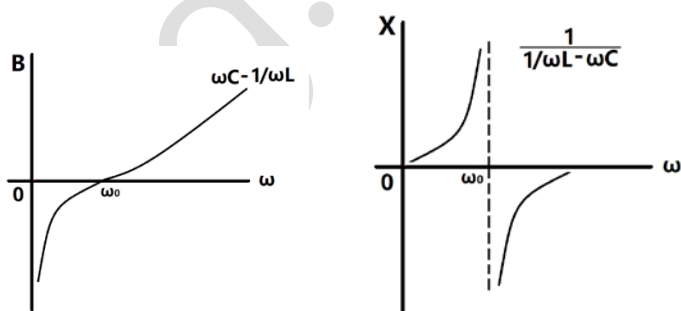


图 2.3.24b 电抗元件频率特性（电抗表示）

对比图 2.3.24 与图 2.2.24 串联谐振电路电抗元件频率特性曲线，我们会发现串并联谐振电路电抗特性成对偶关系。

从图 2.3.24b 可以看出：

- 当 $\omega < \omega_0$ 时，感抗大于容抗 ($\omega L > 1/\omega C$)，电路呈感性；
- 当 $\omega > \omega_0$ 时，容抗大于感抗 ($\omega L < 1/\omega C$)，电路呈容性；
- 当 $\omega = \omega_0$ 时，感抗等于容抗 ($\omega L = 1/\omega C$)，电抗无穷大，电路的阻抗由电阻元件体现，电路呈阻性，发生谐振；

这 3 条结论与 Lab2.2-5 串联谐振电路各元件电压频率响应实验最终的三条结论恰成对偶关系。

2.4 本章总结

前面几节就串行谐振与并联谐振做了很多分析推导，也安排了不少实验。本节首先对前面实验中的一些问题做一些研究分析，并通过实验进行验证，最后对全章知识点加以总结。

2.4.1 *Lab2.4-1 谐振频率偏移问题研究

实验目的

- 分析串联谐振电路不同电阻下谐振频率偏移问题产生原因，并通过实验加以验证；
- 学会发现问题、分析问题、设计实验加以验证的方法；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) 口袋仪器（示波器、信号源）
 - b) 万用表
 - c) 短接线、剥线钳、镊子……

实验说明

这是一个研究型实验，通过这个实验分析验证前面实验中出现的谐振频率偏移问题产生原因并做定量分析。

问题提出

在 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制](#) 实验中，我们测量绘制了 $R=300\Omega$ 与 $1k\Omega$ 时两条谐振曲线，根据谐振频率 [公式 2.2.1](#)： $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 可知：电路的谐振频率只与电感值 L 、电容值 C 有关，与电阻值 R 无关。电阻 R 大小只影响电路的品质因数 Q ，不会影响电路的谐振频率 ω_0 ，但从实际测量曲线（[图 2.2.7](#)）或数据（[表 2.2.1](#)）可以看到： $R=300\Omega$ 时谐振频率约为 5kHz；换用 $R=100\Omega$ 电阻后谐振频率降低了——约为 4.8kHz。这该如何解释呢？

理论分析

经过反复实验，光用测量误差不能完全解释谐振频率偏移为何这么大。后来经过进一步查阅资料发现有可能是元件的信号电平（电流）特性造成的，即：元件的参数与信号电平（电流）大小有关。

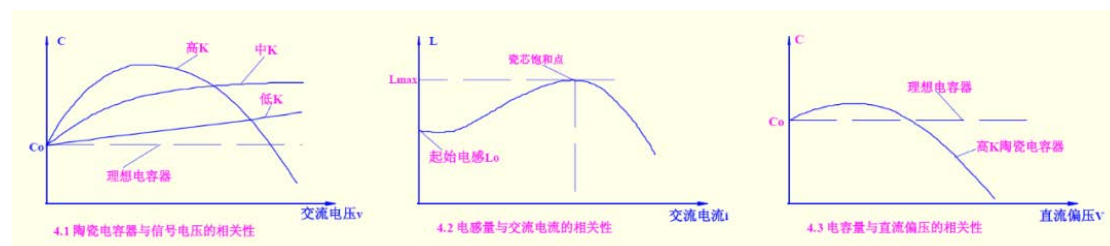


图 2.4.1 元件与信号电平（电流）相关性

由图 2.4.1 可见所有实际元件均存在信号电平的相关性，只是有些材质的元件对电平（电流）的变化不敏感，而有些则具有较高的敏感性，这是否能够解释前面实验中谐振频率偏移问题呢？下面再设计一个实验加以验证并定量分析。

实验过程与分析

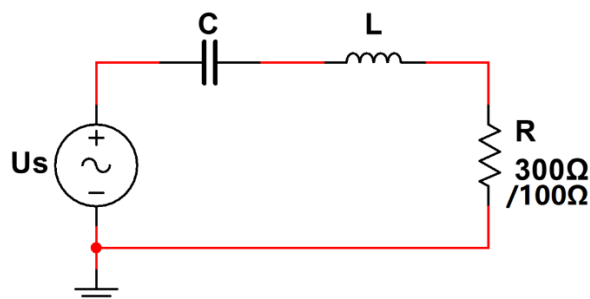


图 2.4.2 RLC 串联谐振电路

图 2.4.2 电路就是 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制](#) 实验中的测量电路，当时保持信号源 U_s 的幅值不变，只改变电阻 R 的阻值，这就会改变电容 C 两端电压与流过电感 L 电流大小。这次我们改变电阻 R 的同时也调整信号源 U_s 的幅值，让电容 C 两端的电压基本保持不变，看看谐振频率 f_0 是否还发生偏移。

为了能精确测量出电路的谐振频率 f_0 ，根据谐振的定义：电路中电流与电压信号没有相位差时即为发生谐振。我们用示波器的两个通道分别采集信号源 U_s 与电阻上的电压信号 U_R ， U_R 与电流信号同相，所以当 U_s 波形与 U_R 没有相位差的时候说明此时信号频率就是谐振频率 f_0 。

与 Y-t 模式相比，示波器的 X-Y 模式更能准确看出两个通道的信号是否存在相位差（图 2.4.3）。

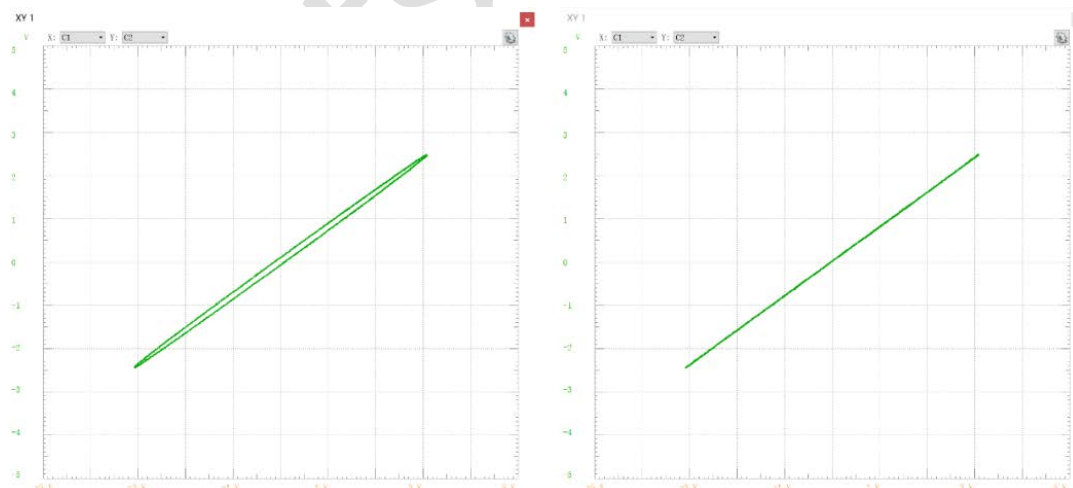


图 2.4.3 两个信号存在相位差（左），两个信号同相（右）

按照图 2.4.3 所示办法对图 2.4.2 电路进行测量发现信号源 $U_s=6V_{p-p}$ ， $R=300\Omega$ ，信号源频率调到 4.887KHz 时信号 U_R 与 U_s 波形重合在一起（图 2.4.4 左）；只把电阻改为 100Ω ，保持信号源 $U_s=6V_{p-p}$ ， $f=4.887\text{kHz}$ 不变时 U_R 与 U_s 波形产生了相位差（图 2.4.4 右）。

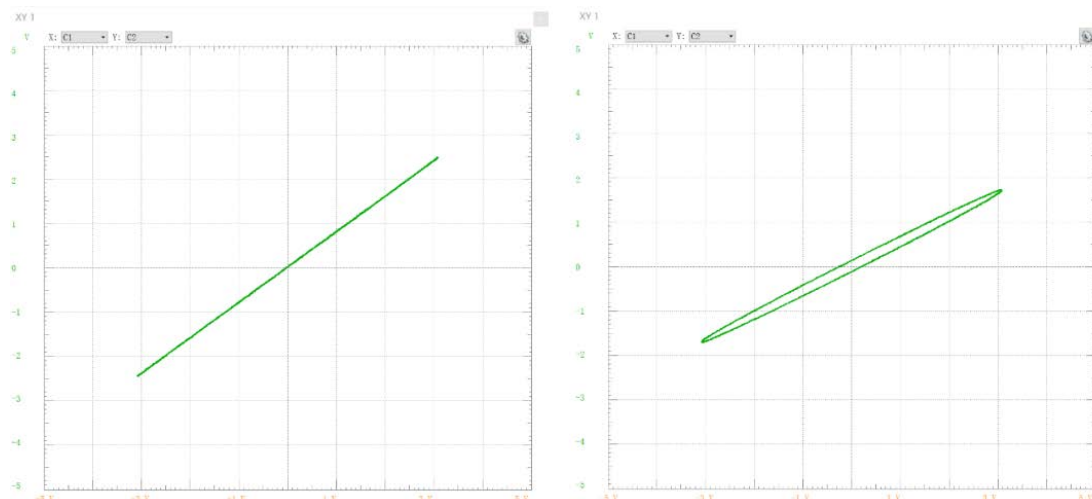


图 2.4.4 $R=300\Omega$ 时 U_R 与 U_S 没有相位差（左） $R=100\Omega$ 时 U_R 与 U_S 存在相位差（右）

$R=100\Omega$ 时，调节信号源 U_S 的频率，当调整到 $f=4.778\text{kHz}$ 时，信号 U_R 与 U_S 波形又重合在一起了（图 2.4.5）；

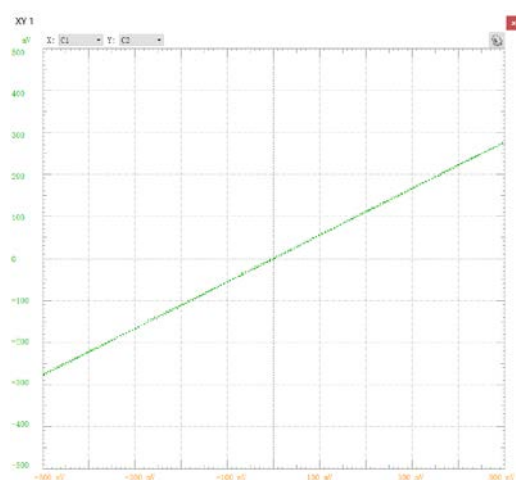


图 2.4.5 $U_S=6\text{Vp-p}$, $f=4.778\text{kHz}$ 时 U_R/U_S 同相

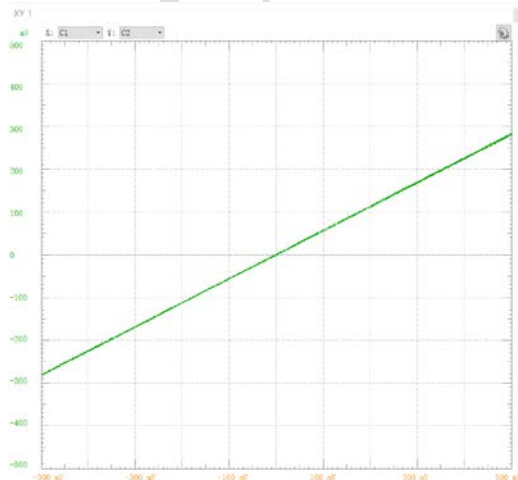


图 2.4.6 $U_S=2.8\text{Vp-p}$, $f=4.887\text{kHz}$ 时 U_R/U_S 同相

对比图 2.4.4 与图 2.4.5 说明，图 2.4.2 电路当其他条件都不变时， $R=300\Omega$ 时的谐振频率 $f_0=4.887\text{kHz}$ ； $R=100\Omega$ 时的谐振频率 $f_0=4.778\text{kHz}$ 。

保持 $R=100\Omega$ 不变，将信号源 U_S 的幅值由 6Vp-p 调整到 2.8Vp-p （让电容 C 两端的电压与 $R=300\Omega$ 时的电压尽量一致），保持信号频率 4.778kHz 不变，我们会发现重合在一起的 U_R 与 U_S 波形又分开了。此时将信号源的频率由 4.778kHz 再调回到 4.887kHz ，能够发现 U_R 与 U_S 波形的相位差再次消失（图 2.4.6）。

通过以上实验证明了谐振频率发生偏移确实是电容 C 两端电压改变引起容值变化造成的。但是换用不同电阻，引起电容两端电压变化的同时流过电感的电流也会发生改变，根据图 2.4.1，此时电感的感值也会发生变化。那谐振频率的偏移主要是电容容值的变化引起的还是电感感值的变化引起的呢？我们接下来用 [Lab2.2-3 电感值、电容值及内阻测量](#) 实验中的方法测量不同信号源电平（电流）下容值的变化率与感值的变化率。

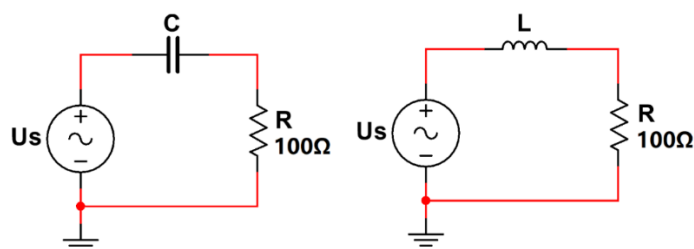


图 2.4.7 电容测量电路（左）电感测量电路（右）

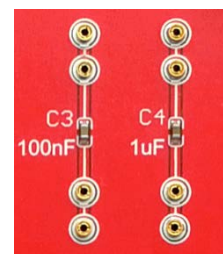
我们通过图 2.4.7 电路测量容值的变化与感值的变化。以容值测量为例，改变信号源 U_s 的幅值，让电容 C 两端电压分别等于图 2.4.2 电路中 $R=300\Omega$ 与 $R=100\Omega$ 时电压，经过计算得到两组容值。同样，利用图 2.4.7 右边电路可以得到两组感值（表 2.4.1）。

参数	信号源 U_s (Vp-p)	电容(μF)/ 电感(mH)	变化率 η (%)	谐振频率 f_0 (KHz)
电容	5.2 (电容电压等于2.4.2电路 $R=300\Omega$ 时的电压)	0.1001	2.836	4.912
	10 (电容电压接近2.4.2电路 $R=100\Omega$ 时的电压)	0.1029		
电感	5.66 (电感电流等于2.4.2电路 $R=300\Omega$ 时的电流)	10.486	0.692	4.827
	10 (电感电流接近2.4.2电路 $R=100\Omega$ 时的电流)	10.558		

表 2.4.1 不同信号源幅值下的容值与感值

从表 2.4.1 可以看到，不同信号源电平（电流）确实会引起容值与感值的变化，而这其中又以容值变化（2.8%）为主。从表 2.4.1 中数据可知：图 2.4.2 电路 $U_s=6V_{p-p}$ ， $R=300\Omega$ 时谐振频率 $f_0 \approx 4.9kHz$ ； $R=100\Omega$ 时谐振频率 $f_0 \approx 4.8kHz$ 是准确的。

电容随电压的变化率比较高的原因是因为实验板上的贴片无极性电容（右图）是一种具有较高介电常数（K 值）的陶瓷电容，对信号电平变化比较敏感（参考图 2.4.1），如果想降低信号电平相关性可以改用钽电容。



元件的参数除了会随信号的电平（电流）发生变化，也会随信号频率发生变化，我们还是通过口袋仪器，使用 [Lab2.2-3 电感值、电容值及内阻测量](#) 实验中的方法测量，可以发现图 2.4.2 电路中信号源 U_s 频率由 4.887kHz 减小到 4.778kHz 时，引起元件参数变化是比较小的（表 2.4.2）。

信号频率 f (KHz)	信号源 U_s (Vp-p)	电容 (μF)	变化率 η (%)
4.778	10 (电容电压接近2.4.2电路 $R=100\Omega$ 时的电压)	0.1029	0.211
4.887		0.1032	

表 2.4.2 不同信号频率下的容值变化

综上所述，造成 [Lab2.2-2 串联谐振曲线测量绘制](#) 实验中谐振频率偏移主要是由陶瓷电容的信号电平特性造成的。用同样的方法也可以分析解释 [Lab2.3-1 并联谐振曲线测量绘制](#) 实验中谐振频率偏移问题，有兴趣的读者可以动手试试。

2.4.2 *Lab2.4-2 口袋仪器测量准确度分析

实验目的

- 通过实验定量分析口袋仪器测量元件参数的准确度；

实验器材

- HA-MB03A 电路分析实验板
- 工具与配件：
 - a) Agilent E4980A 精密型 LCR 表
 - b) 口袋仪器（示波器、信号源）
 - c) 万用表
 - d) 短接线、剥线钳、镊子……

问题提出

前面众多实验我们基本都是基于 HPI-1000(plus)口的仪器与便携式万用表完成，有些同学认为这些体积小、价格不高的便携式仪器，测量精度必然比实验室里笨重、昂贵的台式仪器差很多。所以有时候实验结果误差较大或是电路输出波形不够完美就认为原因是手边的仪器设备不够给力，并且在 [Lab2.3-2 使用 LCR 表测量元件参数](#) 实验中确实发现 LCR 表测量得到的 HA-MB03A 实验板上的电感、电容参数（[图 2.3.14](#)）与 [Lab2.2-3 电感感值、电容容值及内阻测量](#) 实验中使用口袋仪器测量得到的结果有一定差别。这果真说明口袋仪器与台式仪器性比，准确度差很多吗？

实验过程与分析

我们使用 [Lab2.3-2 使用 LCR 表测量元件参数](#) 实验中使用过的 Agilent E4980A 精密 LCR 表与口袋仪器在同一条件下对 HA-MB03A 电路板上同一元件参数进行测量，并定量分析两个仪器的测量误差。

测量电路如图 2.4.7 所示，参考使用 [Lab2.2-3 电感感值、电容容值及内阻测量](#) 实验方法，使用口袋仪器与万用表测量出电容与电感的主要参数，记录在表 2.4.3 中。然后用 Agilent E4980A 精密 LCR 表在同样条件下测量电容与电感参数（图 2.4.8），也记录在表 2.4.3 中。



图 2.4.8 精密 LCR 表测量得到的电容参数（左）电感参数（右）

参数	信号频率f (KHz)	U _c (Vrms) U _i (Vrms) (信号电平)	电容(nF)/ 电感(mH) (实验测量)	电容(nF)/ 电感(mH) (LCR表测量)	误差η (%)	内阻r(Ω) (实验测量)	内阻r(Ω) (LCR表测量)	误差η (%)
电容	4.8	1.8	100.6283	102.8279	2.1	6.492	6.967	6.8
电感	4.8	3.3	10.5585	10.6683	1.0	75.844	72.731	4.3

表 2.4.3 口袋仪器与精密 LCR 表测量结果比较

通过表 2.4.3 可以看出，与 LCR 表测量结果相比，口袋仪器测量得到的容值、感值误差只有 1~2%，内阻误差在 4~7%左右，这个精度对于一般实验而言是可以接受的。Agilent E4980A 精密 LCR 表价格在人民币 26 万左右，很多基础实验室可能都不会配备，更不可能做到“人手一台，随时使用”。

至于 [Lab2.3-2 使用 LCR 表测量元件参数](#) 实验中 LCR 表与口袋仪器测量值相差较大的原因是测量条件不一致造成的（参考 [Lab2.4-1 谐振频率偏移问题研究](#)）。

由此可见，只要对电路基本概念与理论知识有着深入理解掌握，对手边的仪器能熟练使用，再借助一定的实验技巧，很多情况下可以用手边的口袋仪器得到相对准确的测量结果。

所以请充分发挥你手边口袋仪器的潜能——不借助昂贵的专业设备，只凭借手边的普通仪器设计或完成高质量的实验需要我们对实验原理本身有着更深入的了解，同时也能让我们从中得到更多的训练，这不正是实验的初衷吗？

2.4.3 本章总结

谐振电路这一章如果用两个字总结就是“**阻抗**”——也就是说不管串联谐振电路还是并联谐振电路都是围绕电路阻抗随频率变化的展开分析研究的。这一章的学习有如下几个特点：

1. 涉及较多的基础知识与概念（比如：相量、阻抗、导纳……），这些基础知识与概念之前可能学过，但如果印象不深就需要重新温习一遍，否则似是而非、不准确的概念会对本章学习造成困扰（参考 [2.1 节](#)）；
2. 这一章公式比较多，有些公式形式上比较复杂，对于这些公式一定不能死记硬背、生搬硬套，而是要弄清楚公式后面的概念及物理图像，否则很容易出错。比如：RLC 串联谐振电路品质因数公式： $Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ （[公式 2.2.5](#)）；RLC 并联谐振电路品质因数公式： $Q = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$ （[公式 2.3.2](#)）；高 Q 值 LC 并联谐振电路的品质因数公式： $Q \approx \frac{\sqrt{L/C}}{r_L}$ （参考 [2.3.5.1 节](#)）。如果在这三个公式后面的物理意义不明白，就容易造成混淆。
3. 串联谐振电路与并联谐振电路很多方面成对偶关系，串行谐振电路是基础；学习并联谐振时对比着串行谐振的特性研究分析，往往能够起到事半功倍的效果。对于并联谐振电路要习惯用导纳进行分析，这会让分析推导过程大大简化。
4. 一般电路教材这一章只安排串联谐振曲线测量一个实验，并联谐振电路部分不安排实验。我们利用万用表、**HPI-1000(plus)**多功能口袋仪器、**CALK-1000 电路分析实验套件**等常见仪器设计了大量实际实验，这比只通过理论分析更能深刻掌握谐振电路特性，同时也能让实验者体验到理想电路与实际电路之间的差别。对这些差别进行进一步深入研究，更能深刻掌握这一章的知识点。

串联谐振电路与并联谐振电路对比见表 2.4.4（下页）。

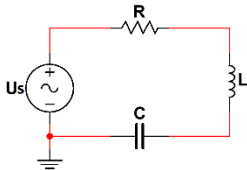
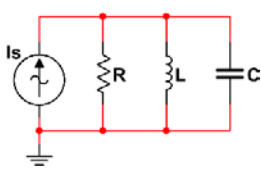
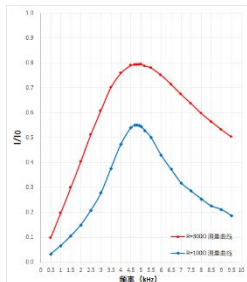
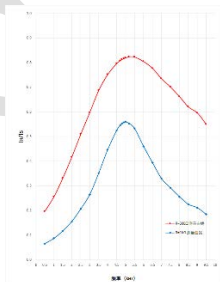
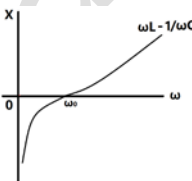
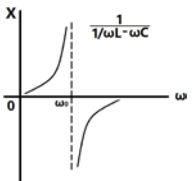
	串联谐振	并联谐振	参考
电路形态			图 2.1.23 图 2.1.24
谐振频率	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$		公式 2.2.1 公式 2.3.1
品质因数	$Q_s = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$	$Q_p = \frac{R}{\rho} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$	公式 2.2.5 公式 2.3.2
谐振曲线	$\frac{R}{Z} = \frac{1}{1 + jQ_s \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$	$\frac{Z}{R} = \frac{1}{1 + jQ_p \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$	公式 2.2.19 公式 2.3.7
谐振曲线 其他形式	定义式: $I/I_0 \sim f$ 测量式: $U_R/U_S \sim f$	定义式: $U/U_0 \sim f$ 测量式: $I_R/I_S \sim f$	公式 2.2.3 公式 2.3.4
谐振曲线 (幅频曲线)			图 2.2.7 图 2.3.4
通频带	$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}, \quad \omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \mp \frac{1}{Q} \right)$		公式 2.2.21 公式 2.2.22
电抗特性	 $\omega < \omega_0$ 容性, $\omega > \omega_0$ 感性 $\omega = \omega_0$ 阻性, $Z=R$ (最小)	 $\omega < \omega_0$ 感性, $\omega > \omega_0$ 容性 $\omega = \omega_0$ 阻性, $Z=R$ (最大)	图 2.2.24 图 2.3.24
谐振特性	$U_{L0} = -U_{C0} = jQU_S$ $U_{L0} = U_{C0} = QU_S$ 电压谐振	$I_{L0} = -I_{C0} = -jQI_S$ $I_{L0} = I_{C0} = QI_S$ 电流谐振	公式 2.2.10 公式 2.3.3

表 2.4.4 串联谐振电路与并联谐振电路特性对比

本章实验汇总见表 2.4.5。

实验项目	实验分类	Multisim 仿真	电路实验
Lab2.1-1 电容特性实验	验证型	√	√
Lab2.1-2 电感特性实验	验证型	√	√
Lab2.1-3 电容容值电感感值初步测量	验证型		√
Lab2.2-1 串行谐振电路基本特性	验证型	√	√
Lab2.2-2 串行谐振曲线测量绘制	验证型	√	√
Lab2.2-3*电感、电容值及内阻测量	研究型		√
Lab2.2-4*串联谐振电路电感与电容电压曲线测量绘制	研究型		√
Lab2.2-5 串行谐振电路各元件电压频率响应	验证型	√	
Lab2.3-1 并行谐振曲线测量绘制	验证型	√	√
Lab2.3-2*使用 LCR 表测量元件参数	验证型		√
Lab2.3-3*LC 并联谐振曲线测量绘制	验证型		√
Lab2.3-4 并行谐振电路各元件电流频率响应	验证型	√	
Lab2.4-1*谐振频率偏移研究	研究型		√
Lab2.4-2*口袋仪器准确度分析	验证型		√

表 2.4.5 本章实验汇总

附录 A 参考资料

- [1] 高继森, 等. 电路分析基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [2] 于歆杰, 等. 电路原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007.
- [3] 王宗田. RLC 串联电路谐振时电感和电容上的电压不是极大值[J]. 物理实验, 1989(4).
- [4] 海洋仪器. 阻抗参数理论[R]. www.hxyyq.com, 2022.
- [5] 海洋仪器. 阻抗测量基础[R]. www.hxyyq.com, 2022.
- [6] Yang Yu. 元器件阻抗测试与分析完整解决方案[R]. www.keysight.com.cn, 2022.

附录 B UT120C 万用表主要技术指标

功能	量程	分辨率	准确度±(a%读数+b字数)	输入保护	说明
直流电压 DCV	400mV	0.1mV	±(0.8%+3)	600V DC 600V AC	输入阻抗≥10MΩ
	4V	1mV	±(0.8%+1)		
	40V	10mV			
	400V	100mV			
	600V	1V	±(1%+3)		
交流电压 ACV	4V	1mV	±(1.2%+3)	600V DC 600V AC	输入阻抗≥10MΩ 频响: 40~400Hz 显示: 正弦波有效值 (平均值响应)
	40V	10mV			
	400V	100mV			
	600V	1V	±(1.5%+5)		
电阻 Ω	400Ω	0.1Ω	±(1.2%+2)	600V AC	开路电压约0.45V
	4kΩ	1Ω	±(1%+2)		
	40kΩ	10Ω			
	400kΩ	100Ω			
	4MΩ	1kΩ	±(1.2%+2)		
	40MΩ	10kΩ	±(1.5%+2)		
电容 CAP (F)	4.000nF	0.001nF	±(4%+3)	600V AC	读数仅供参考
	40.00nF	0.01nF			在RELATIVE测量模式下测量 开路电压约0.45V
	400.0nF	0.1nF			
	4.000μF	0.001μF			
	40.00μF	0.01μF			
	100μF	0.1μF	±(5%+10)		当被测电容大于“100μF”时读数仅供参考
频率 Hz	99.9Hz	0.1Hz	±(0.5%+3)	600V AC	输入电压为正弦波 10Hz~10kHz: ≥1Vrms 10kHz~100kHz: ≥30Vrms
	0.999kHz	0.001kHz			
	9.99kHz	0.01kHz			
	99.9kHz	0.1kHz			
占空比 DUTY	0.1%~99.9%	0.10%		600V AC	在AC/DC档按DUTY按钮转换为DUTY测量 (读数仅供参考)
二极管		1mV	0.5V~0.8V	600V AC	开路电压约1.5V
音响通断		0.1Ω	约≤60Ω	600V AC	导通电阻≤60Ω时 机内蜂鸣器响, >60Ω 时可响可不响, 显示 电阻近似值, 单位 “Ω”
低电压显示			约<2.4V		显示“  ”符号
直流电流 DCA	400μA	0.1μA	±(1.0%+3)	保险丝 400mA, 600V	
	4000μA	1μA			
	40mA	10μA	±(1.2%+5)		
	400mA	100μA			
交流电流 ACA	400μA	0.1μA	±(1.5%+5)	保险丝 400mA, 600V	
	4000μA	1μA			
	40mA	10μA	±(2%+5)		
	400mA	100μA			